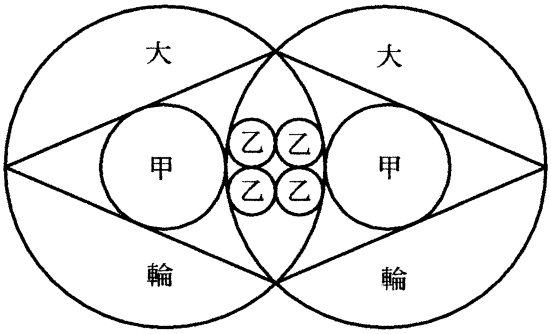
4.5 和田栄太郎

【問題文】



図のように、2個の交わる大円と菱形があり、菱形内に甲円が2個、乙円が4個ある。菱形の1辺の長さが与えられたとき、甲円の直径の長さを最大とするときの乙円の直径の長さを求めよ。

【現代解】

図7のように、菱形を ABCD とし、その1辺の長さを a、大円の半径を p、甲円の半径を q、乙円の半径を r とする。また、$\angle ABD = \theta$ とおく。右側の大円の中心を P、右側の甲円の中心を Q、Q から AD に下ろした垂線の足を H とする。

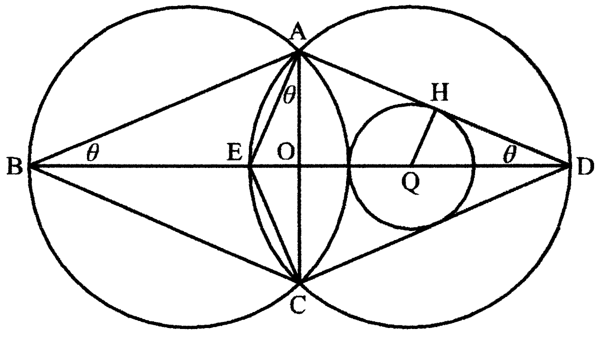


図 7: 甲円を求める

直角三角形 $\triangle$AED により、

$$p = \frac{a}{2\cos\theta} \tag{1}$$

である。直角三角形 $\triangle$HQD から、

$$\mathrm{QD} = \frac{q}{\sin\theta}$$

となり、一方で

$$\mathrm{QD} = \mathrm{ED} - 2\mathrm{EO} - q = 2p - 2\mathrm{AE}\sin\theta - q = 2p - 4p\sin^2\theta - q$$

従って、これら2式を整理すると、

$$q = 2p\frac{\sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)}{1 + \sin\theta} \tag{2}$$

が得られ、さらに (1) を代入すると、

$$q = a\frac{\sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)}{\cos\theta(1 + \sin\theta)} \tag{3}$$

となる。

次に、この q の値を最大にする θ の値を求めることにしよう。そこで、$\tan\frac{\theta}{2} = t$ とおいて、

$$\cos\theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin\theta = \frac{2t}{1 + t^2} \tag{4}$$

を (3) に代入して整理すると、

$$q = a\frac{2t(t^4 - 6t^2 + 1)}{(1 - t^2)(1 + t)^2(1 + t^2)} \tag{5}$$

となる。

最大値を求めるために q を t で微分すると、

$$\frac{dq}{dt} = a\frac{2\left(t^8 - 2t^7 - 16t^6 + 10t^5 - 2t^4 + 10t^3 - 16t^2 - 2t + 1\right)}{(1 - t)^2(1 + t)^4\left(1 + t^2\right)^2} \tag{6}$$

となる、そこで 8 次方程式

$$t^8 - 2t^7 - 16t^6 + 10t^5 - 2t^4 + 10t^3 - 16t^2 - 2t + 1 = 0 \tag{7}$$

を解く必要があるが、残念ながらその正確な値を求めることはできない。そこでその実数解を近似計算で求めると、

$$t = -3.510352793,\ -0.2848716523,\ 0.2053586121,\ 4.869530378$$

の 4 解がある。この中で題意を満たして q を最大にするのは、

$$t = 0.2053586121 \tag{8}$$

である。このとき、(4) により、

$$\cos\theta = 0.9190687274, \quad \sin\theta = 0.3940972904 \tag{9}$$

である。

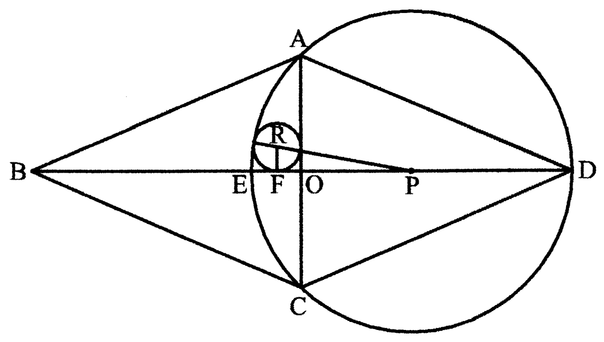


図 8: 乙円を求める

続いて、乙円の半径 r を求めよう。図 8 の乙円の中心を R、直線 BD との接点を F とする。直角三角形 $\triangle$RFP において、RF = r、FP = FO + OP = $r + a\cos\theta - p$、PR = $p - r$ を三平方の定理にあてはめると、

$$(p - r)^2 = r^2 + (a\cos\theta - p + r)^2$$

となるので、これを整理して、

$$(r-(1-\cos\theta)a)(r+(1+\cos\theta)a)=0$$

を得るが、$r>0$ なので、

$$r=(1-\cos\theta)a \tag{10}$$

である。近似解としては $r \fallingdotseq 0.08093127\,a$ となる。

【算額の解】

算額の術日は、

$$\text{乙円直径}\ (2r)=\left(2-\sqrt{2\sqrt{3}}\right)a$$

と簡潔な式で示されている。このときの近似解は $r \fallingdotseq 0.06939514$ である。

これは、(2) 式の p を定数と見なして、甲円が最大になるときの θ を調べていることになる。この仮定のもとでは、甲円が最大となるのは、

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}-1}{2},\ \cos\theta=\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}$$

のときで、そのときの乙円直径は、

$$2r=2(1-\cos\theta)\,a=\left(2-\sqrt{2\sqrt{3}}\right)a$$

となってしまう。

甲円と大円が連動して変化している点が見落とされたものと思われ残念である。