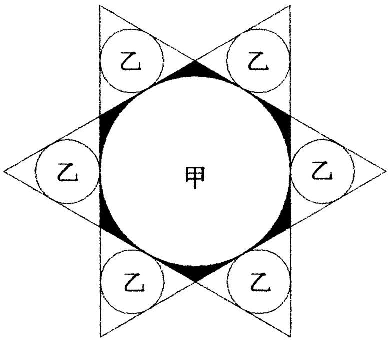
4.33 手嶋太助

【問題文】



図のように、正三角形2つを内部に正六角形ができるように斜めにずらして置き、その間に甲円1個と乙円6個を入れる。黒積（黒く塗った部分の面積）が291寸8分4厘9毛余のとき、乙円の直径はいくらか。

【現代解】

正六角形の1辺の長さを a、甲円の半径を R、乙円の半径を r、黒積を S とする。次の図59は甲円の6分の1と乙円1つを取り出した図である。

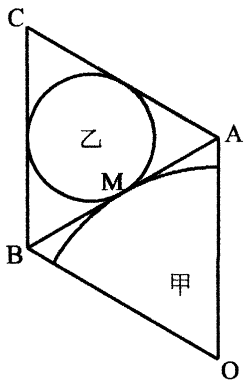


図59: 手嶋の問題

甲円の半径 R は

$$R = \mathrm{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a \tag{1}$$

である。乙円の外接正三角形の1辺の長さも a なので、乙円の中心（内心）は重心と一致するため、乙円の半径 r は

$$r = \frac{\mathrm{CM}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}a \tag{2}$$

である。黒積は正六角形の面積

$$6 \times \triangle OAB = 6 \cdot \frac{1}{2}\mathrm{AB} \cdot \mathrm{OM} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

から甲円の面積

$$\pi R^2 = \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \frac{3}{4}\pi a^2$$

を引いたものなので、

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 - \frac{3}{4}\pi a^2 = S$$

である。これを解いて、

$$a = 2\sqrt{\frac{S}{6\sqrt{3} - 3\pi}}$$

である。従って、乙円半径 r は

$$r = \frac{\sqrt{3}}{6}a = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{S}{2\sqrt{3} - \pi}} \tag{3}$$

である。

最後に、$S = 291.849$ とするとき乙円の直径は

$$2r = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{291.849}{2\sqrt{3} - \pi}}$$

で、およその値は $2r \fallingdotseq 20.054736$ である。

【算額の解】

算額の術曰には、式 (3) を数値化した

$$\text{乙円直径} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{0.72918}}$$

とあり、答曰には 20.0 寸有奇とある。ともに現代解と一致している。