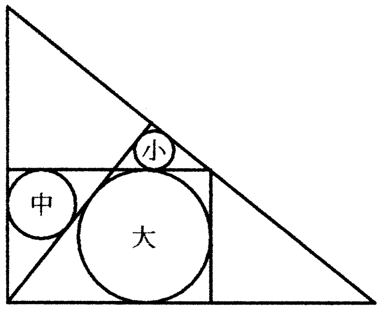
4.4 簡野主計

【問題文】



図のように、直角三角形の3辺、頂点から斜辺に引いた垂線、及び長方形に内接する大中小3個の円がある。直角をはさむ2辺の長さが与えられたとき、3個の円の半径をそれぞれ求めよ。

【現代解】

図6のように点 A, B, ..., I を定める。△ ABC の3辺の長さを、BC = a、CA = b、AB = $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ とする。大中小3円の半径をそれぞれ r_1, r_2, r_3 とする。

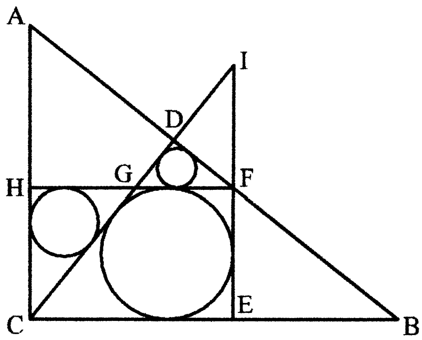


図 6: 簡野の問題

以下の計算には △ ABC、△ AFH、△ CIE、△ GCH、△ GFD がすべて相似であることを用いる。△ ABC の内接円の半径を r とするとき、補助定理2により

$$r = \frac{a + b - c}{2} \tag{1}$$

であることに注意。

線分 HF = CE の長さを x とおくとき、△ ABC と△ AFH は相似なので、BC:CA=FH:HA より $a : b = x : (b - 2r_1)$ となり、

$$x = \frac{a(b - 2r_1)}{b} \tag{2}$$

を得る。

△ ABC と△ CIE とは相似なので、$r : r_1 = \mathrm{AC} : \mathrm{CE} = b : x$ である。これより、

$$br_1 = xr = \frac{a(b - 2r_1)r}{b}$$

となる。これを整理すると、

$$r_1 = \frac{abr}{b^2 + 2ar} = \frac{ab(a + b - c)}{2(b^2 + a(a + b - c))} \tag{3}$$

を得る。

△ABC と△GCH とは相似なので、

$$r : r_2 = \mathrm{BC} : \mathrm{CH} = a : 2r_1$$

となる。これより、

$$r_2 = \frac{2r}{a}r_1 = \frac{a+b-c}{a}r_1 \tag{4}$$

となる。

また、$\mathrm{CD} = \frac{ab}{c}$ と $\mathrm{CG} = \frac{2cr_1}{a}$ により、

$$\mathrm{GD} = \mathrm{CD} - \mathrm{CG} = \frac{ab}{c} - \frac{2cr_1}{a} = \frac{a^2b - 2c^2r_1}{ac}$$

である。△ABC と△GFD とは相似なので、

$$r : r_3 = \mathrm{AC} : \mathrm{GD} = b : \frac{a^2b - 2c^2r_1}{ac}$$

従って、

$$r_3 = \frac{r(a^2b - 2c^2r_1)}{abc} = \frac{(a+b-c)(a^2b - 2c^2r_1)}{2abc} \tag{5}$$

を得る。

【算額の解】

算額の術日には、

$$\text{大円直径}\ (2r'_1) = \frac{2a^2b}{2a^2 + (a+b+c)b} \tag{6}$$

$$\text{中円直径}\ (2r'_2) = \frac{b^2(2r'_1)^2}{(b - 2r'_1)a^2} \tag{7}$$

$$\text{中円直径}\ (2r'_3) = 2r'_2 - \frac{2r'_1}{(w-1)^2 + w^2} \qquad \text{ただし、}\ w = \frac{r'_1}{r'_2} \tag{8}$$

と示されている。

大円については、

$$\begin{aligned} r_1 - r'_1 &= \frac{ab(a+b-c)}{2\left(a(a+b-c) + b^2\right)} - \frac{a^2b}{2a^2 + b(a+b+c)} \\ &= \frac{ab^2\left(a^2+b^2-c^2\right)}{2\left(a^2+ab-ac+b^2\right)\left(2a^2+ab+b^2+bc\right)} = 0 \end{aligned}$$

中円については、

$$\begin{aligned} r_2 - r'_2 &= \frac{b(a+b-c)^2}{2\left(a(a+b-c) + b^2\right)} - \frac{2a^2b^2}{(a+b+c)\left(2a^2+ab+b^2+bc\right)} \\ &= \frac{b\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(2a^3+3a^2b-2a^2c+4ab^2+b^3-bc^2\right)}{2(a+b+c)\left(a^2+ab-ac+b^2\right)\left(2a^2+ab+b^2+bc\right)} = 0 \end{aligned}$$

小円については、

$$\begin{aligned} r_3 - r'_3 &= \frac{(a+b-c)\left(a^3+a^2b-a^2c+ab^2-ac^2-bc^2+c^3\right)}{2c\left(a^2+ab-ac+b^2\right)} - \frac{2a^2b^2(a+c)(a-b+c)}{(a+b+c)\left(2a^2+ab+b^2+bc\right)\left(a^2+2ac+b^2+c^2\right)} \\ &= \frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(2a^7+7a^6b+2a^6c+\cdots\text{中略}\cdots-b^5c^2+bc^6\right)}{2c(a+b+c)\left(a^2+ab-ac+b^2\right)\left(2a^2+ab+b^2+bc\right)\left(a^2+2ac+b^2+c^2\right)} = 0 \end{aligned}$$

であり、現代解と一致していることが確認できる。この問題は、計算方法によって違った式が答として出てきて、それが同じものであることの確認に手間取る、厄介な問題である。