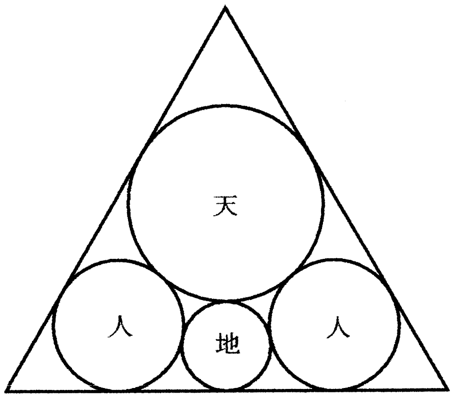
4.7　山崎喜右衛門

【問題文】

（右）



図のように、正三角形内に天円 1 個、地円 1 個、人円 2 個がある。正三角形の 1 辺の長さが与えられたとき、人円の直径の長さを求めよ。

【現代解】

図 11 のように、正三角形 ABC の 1 辺の長さを a とし、天円、地円、人円それぞれの中心を O_1, O_2, O_3、半径を r_1, r_2, r_3 とする。辺 BC と地円、右側人円との接点をそれぞれ D, E とする。辺 AC と天円、人円との接点をそれぞれ F, G とする。

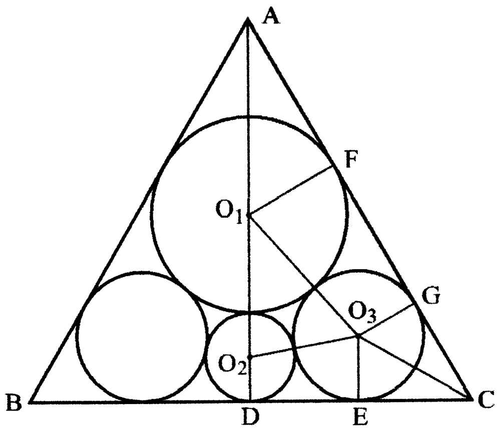


図 11: 右の問題

補助定理 3 より $DE = 2\sqrt{r_2 r_3}$ である。また、$EC = \sqrt{3}r_3$、$DC = \frac{a}{2}$ であることにより、

$$4\sqrt{r_2 r_3} + 2\sqrt{3}r_3 = a \tag{1}$$

を得る。また、$AO_1 = 2r_1$、$O_1O_2 = r_1 + r_2$、$O_2D = r_2$、$AD = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ により、

$$6r_1 + 4r_2 = \sqrt{3}a \tag{2}$$

である。さらに、補助定理 4 により

$$r_1(r_3 - r_2) = r_2^2 \tag{3}$$

となるので、これら3式の連立方程式を解けばよい。

そこで、$a = 2tr_3$、$r_1 = xr_3$、$\sqrt{r_2} = y\sqrt{r_3}$ を代入して整理すると、

$$\begin{aligned} &2y + \sqrt{3} = t \\ &3x + 2y^2 = \sqrt{3}t \\ &x(1 - y^2) = y^4 \end{aligned} \tag{4}$$

この3式から x, y を消去して整理すると、4次方程式

$$t^4 + 2t^2 - 32\sqrt{3}t + 33 = 0 \tag{5}$$

を得る。

この式の左辺は

$$t^4 + 2t^2 - 32\sqrt{3}t + 33 = (t^2 + 4t + 9 + 4\sqrt{3})(t^2 - 4t + 9 - 4\sqrt{3}) \tag{6}$$

と因数分解できる。因数分解の方法としては

$$t^4 + 2t^2 - 32\sqrt{3}t + 33 = (t^2 + p)^2 - (qt + r)^2$$

とおいて係数比較するとよい。具体的には、右辺を展開して、

$$t^4 + 2t^2 - 32\sqrt{3}t + 33 = t^4 + (2p - q^2)t^2 - 2qrt + p^2 - r^2$$

係数比較すると

$$\begin{aligned} &q^2 = 2p - 2 \\ &qr = 16\sqrt{3} \\ &r^2 = p^2 - 33 \end{aligned}$$

これより、

$$(2p - 2)(p^2 - 33) = 16^2 \cdot 3$$

$$(p - 9)(p^2 + 8p + 39) = 0$$

となり $p = 9, q = 4, r = 4\sqrt{3}$ なる解が見つかる。これを用いて式(6)の因数分解を得る。

従って、方程式

$$(t^2 + 4t + 9 + 4\sqrt{3})(t^2 - 4t + 9 - 4\sqrt{3}) = 0 \tag{7}$$

を解けばよいことになる。2次方程式 $t^2+4t+9+4\sqrt{3} = 0$ は実解を持たないので、もう一方の $t^2-4t+9-4\sqrt{3} = 0$ を解くことで、

$$t = 2 + \sqrt{4\sqrt{3} - 5}, \quad 2 - \sqrt{4\sqrt{3} - 5}$$

を得る。これより、人円の半径 r_3 は、

$$r_3 = \frac{a}{2\left(2 + \sqrt{4\sqrt{3} - 5}\right)}, \quad \frac{a}{2\left(2 - \sqrt{4\sqrt{3} - 5}\right)}$$

となるが、後者はおよそ $r_3 \fallingdotseq 0.8a$ となり、半径が大きすぎて三角形におさまらないので不適。従って、

$$r_3 = \frac{a}{2\left(2 + \sqrt{4\sqrt{3} - 5}\right)} \tag{8}$$

即ち

$$人円直径 = 2r_3 = \frac{a}{2+\sqrt{4\sqrt{3}-5}} \tag{9}$$

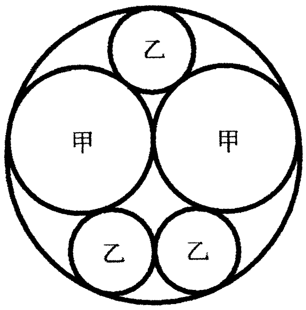
となる。

【算額の解】

算額の術日には、「48を平方に開き、5を引いて平方に開き、2を加え、これで正三角形の一辺を除すと、人円径を得る」とあり (9) 式と一致する。

【問題文】

（左）



図のように、平円内に甲円2個、乙円3個がある。甲円の直径の長さが与えられたとき、乙円の直径の長さを求めよ。

【現代解】

図12のように、平円の中心をO、半径を a、甲円の中心を O_1、半径を r_1、乙円の中心を O_2, O_2'、半径を r_2 とする。また、接点を図のように A, B, C, D, E とする。点Oを原点とし、直線OAが y 軸となるように座標を入れる。点 O_1, O_2 の座標をそれぞれ $(r_1, y_1), (r_2, y_2)$ とする。

線分 OO_1 と OO_2 の長さを計算することで、

$$(a-r_1)^2 = r_1^2 + y_1^2, \quad (a-r_2)^2 = r_2^2 + y_2^2$$

これより、

$$r_1 = \frac{a^2 - y_1^2}{2a}, \quad r_2 = \frac{a^2 - y_2^2}{2a} \tag{10}$$

となる。同様に線分 O_1O_2 と O_1O_2' の長さを計算すると、

$$(r_1+r_2)^2 = (r_1-r_2)^2 + (y_1-y_2)^2, \quad (r_1+r_2)^2 = r_1^2 + (a-r_2-y_1)^2$$

となるので r_1, r_2 を代入して整理すると、

$$(3a^2 - y_2^2)y_1 - 3ay_2^2 + a^3 = 0 \tag{11}$$

$$y_1^2(y_2^2 - 2a^2) + 2a^2y_1y_2 - 2a^2y_2^2 + a^4 = 0 \tag{12}$$

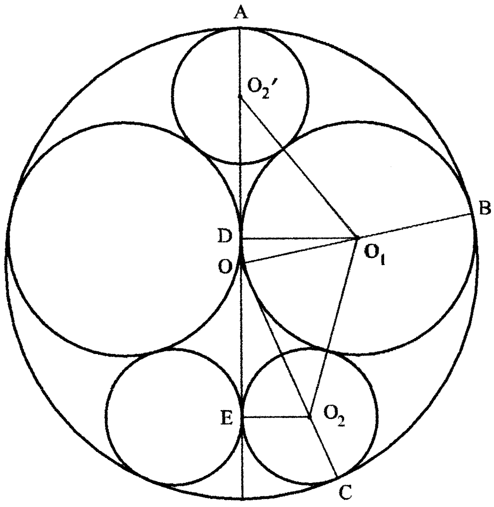


図 12: 左の問題

となる。従って (11) より y_1 は

$$y_1 = \frac{3ay_2^2 - a^3}{3a^2 - y_2^2} \tag{13}$$

これを (12) に代入して y_1 を消去すると、

$$7y_2^4 + 8ay_2^3 - 2a^2y_2^2 + 8a^3y_2 + 7a^4 = 0$$

となる。ここで、$y_2 = ta$ とおくと、

$$7t^4 + 8t^3 - 2t^2 + 8t + 7 = 0 \tag{14}$$

を得る。この 4 次方程式は簡単に解くことができる。左辺を 7 倍することで次のように因数分解できる。

$$49t^4 + 56t^3 - 14t^2 + 56t + 49 = (7t^2 + 4t + 7)^2 - 128t^2 = (7t^2 + (4 + 8\sqrt{2})t + 7)(7t^2 + (4 - 8\sqrt{2})t + 7)$$

従って

$$(7t^2 + (4 + 8\sqrt{2})t + 7)(7t^2 + (4 - 8\sqrt{2})t + 7) = 0 \tag{15}$$

ここで、$7t^2 + (4 - 8\sqrt{2})t + 7 = 0$ は実解を持たないので、$7t^2 + (4 + 8\sqrt{2})t + 7 = 0$ を解くと、

$$t = -\frac{1}{7}\left(4\sqrt{2} + 2 \pm \sqrt{16\sqrt{2} - 13}\right)$$

解は $-a < y_2 < 0$ より $-1 < t < 0$ なので、

$$t = -\frac{1}{7}\left(4\sqrt{2} + 2 - \sqrt{16\sqrt{2} - 13}\right) \tag{16}$$

である。

次に、この t の値から甲円と乙円の半径の比を求めることを考えよう。$y_2 = ta$ なので (13) より、

$$y_1 = \frac{3t^2 - 1}{3 - t^2}a \tag{17}$$

従って (10) を用いて半径の比を求めると、

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{a^2 - y_2^2}{a^2 - y_1^2} = \frac{1 - t^2}{1 - (\frac{3t^2-1}{3-t^2})^2} = \frac{(t^2 - 3)^2}{8(t^2 + 1)} \tag{18}$$

となる。

この式に t の値を直接代入して計算するのは大変なので一工夫しよう。そこで、$p(t) = 7t^4 + 8t^3 - 2t^2 + 8t + 7$ とおく。

$$(t^2+1)\cdot\frac{1}{16}(-7t^2-8t+9)+\frac{1}{16}p(t)=1$$

なので、

$$(t^2+1)\cdot\frac{1}{16}(-7t^2-8t+9)\equiv 1 \pmod{p(t)}$$

この式により (t^2+1) の逆数が求まる。

$$\frac{1}{(t^2+1)}\equiv\frac{1}{16}(-7t^2-8t+9) \pmod{p(t)}$$

従って、

$$\frac{r_2}{r_1}=\frac{(t^2-3)^2}{8(t^2+1)}\equiv\frac{1}{128}(t^2-3)^2(-7t^2-8t+9)\equiv\frac{1}{4}(-3t^2-4t+1) \pmod{p(t)}$$

ここで t の値を代入して計算すると、

$$\frac{r_2}{r_1}=\frac{1}{49}\left(9+4\sqrt{2}+2\sqrt{508\sqrt{2}-670}\right)$$

従って、答えは

$$r_2=\frac{1}{49}\left(9+4\sqrt{2}+2\sqrt{508\sqrt{2}-670}\right)r_1 \tag{19}$$

である。

【算額の解】

算額の術日には、「2 を平方に開き、2 を加え、これを極と名づけ、8 倍し 5 を減じ、平方に開いて、極を減じ、自乗し、これで甲円径を除して、人円径を得る」とある。すなわち、

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{2}+2 \\ r_2 &= \frac{r_1}{\left(\sqrt{8w-5}-w\right)^2} \end{aligned}$$

という式である。

この式を変形してみると、

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{r_1}{\left(\sqrt{8w-5}-w\right)^2} \\ &= \frac{r_1}{\left(\sqrt{11+8\sqrt{2}}-2-\sqrt{2})\right)^2} \\ &= \frac{r_1}{17+12\sqrt{2}-2\sqrt{130+92\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{49}\left(9+4\sqrt{2}+2\sqrt{508\sqrt{2}-670}\right)r_1 \end{aligned}$$

となり、現代解と一致する。和算家の簡潔な答えの表記には感服させられる。