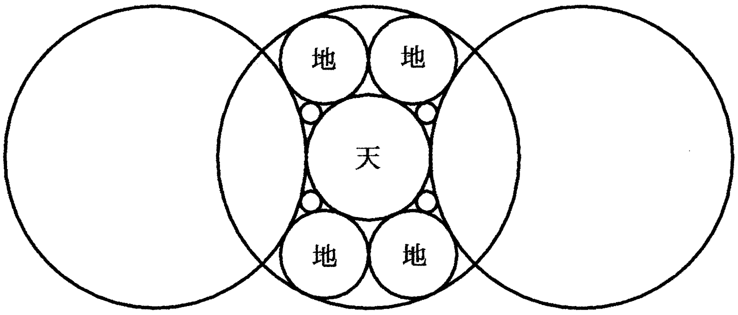
4.17　俊野巻衛

【問題文】



図のように、直径が等しい 3 個の円が交わり、その間に天円 1 個、地円 4 個、人円 4 個がある。地円の直径の長さが与えられたとき、人円の直径の長さを求めよ。

【現代解】

等しい 3 円の中央の円の中心を O、右側の円の中心を A、半径を a とする。天円の半径を b、地円の半径を c、人円の半径を r とする。右上の地円の中心を C、C から OA に下ろした垂線の足を H とする。直線 OC と円 C の 2 交点を図 39 のように B, D とする。

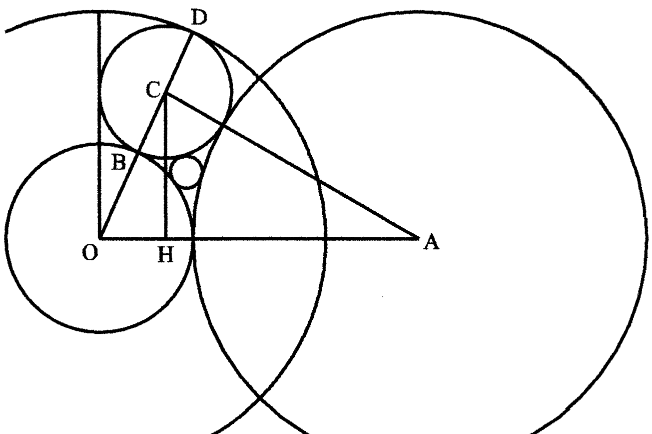


図 39: 俊野の算額

最初に、OD の長さを考えることで、

$$a = b + 2c \tag{1}$$

を得る。次に △COH に三平方の定理を用いて、

$$CH^2 = (b + c)^2 - c^2 \tag{2}$$

また、△CHA に三平方の定理を用いて、

$$CH^2 = (a + c)^2 - (a + b - c)^2 \tag{3}$$

である。

この3式を整理すると、$b^2 = 2c^2$ となるので、

$$b = \sqrt{2}c, \quad a = (2 + \sqrt{2})c \tag{4}$$

となる。

最後は、補助定理19(2)の式

$$\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - 2abc(a+b+c)\right)r^2 - 2abc(ab+bc+ca)r + a^2b^2c^2 = 0 \tag{5}$$

を用いて、人円の半径 r を求めればよい。式(4)を代入して整理すると、

$$2(1+\sqrt{2})r^2 + 4(3+2\sqrt{2})cr - (3+2\sqrt{2})c^2 = 0$$

$$r^2 + 2\left(1+\sqrt{2}\right)cr - \frac{1+\sqrt{2}}{2}c^2 = 0 \tag{6}$$

この2次方程式を r について解くと、

$$r = (1+\sqrt{2})\left(-1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})}\right)c$$

となるが、その一つは負となるので不適であり、

$$r = (1+\sqrt{2})\left(-1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})}\right)c \tag{7}$$

となる。

【算額の解】

算額の答は、(7)式の係数の逆数を計算し、より簡潔な式

$$r = \frac{c}{2+\sqrt{2+2\sqrt{2}}} \tag{8}$$

を導いている。奉納者は(6)式を

$$\left(\frac{c}{r}\right)^2 - 4\left(\frac{c}{r}\right) + 2(1-\sqrt{2}) = 0$$

と変形し、これから

$$\frac{c}{r} = 2 + \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

を導いたものと思われる。