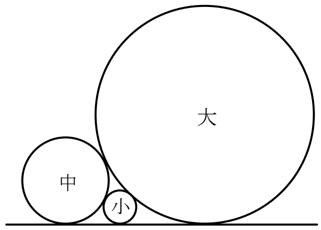
# 和算問題に挑戦しよう〈解答〉

## 『初級問題』

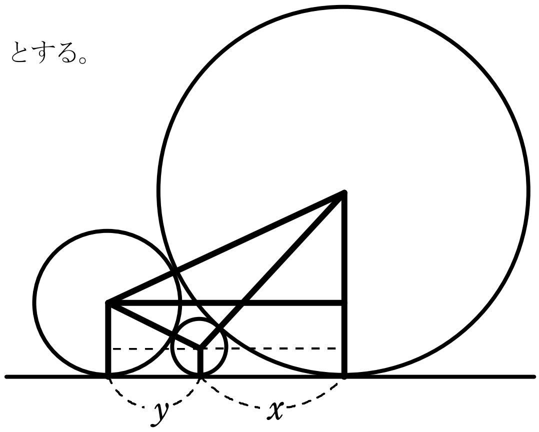
１　図のように、中円の直径が９寸、小円の直径が４寸であるとき、大円の直径を求めよ。

（金王八幡神社（東京都渋谷区）の算額）




解）大円，中円，小円の直径をそれぞれ $a, b, c$ とする。

また，大円と小円，小円と中円との接点間の距離をそれぞれ $x, y$ とする。




大円と小円の関係より

$$x^2=\left(\frac{a}{2}+\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}-\frac{c}{2}\right)^2=a\cdot c \quad \cdots\cdots ①$$

小円と中円の関係より

$$y^2=\left(\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}-\frac{c}{2}\right)^2=b\cdot c \quad \cdots\cdots ②$$

大円と中円の関係より

$$(x+y)^2=\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)^2=a\cdot b \quad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ。①，②，③ より，$x=\sqrt{ac}$，$y=\sqrt{bc}$，$x+y=\sqrt{ab}$

$x$ と $y$ を消去すると，$\sqrt{ac}+\sqrt{bc}=\sqrt{ab}$

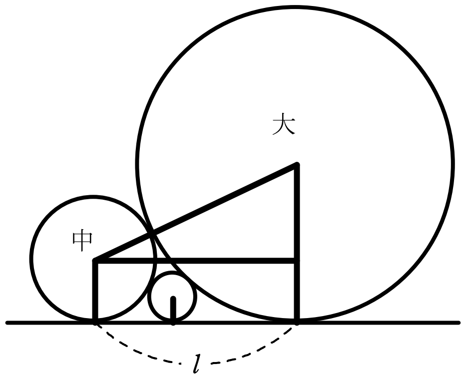
$$(\sqrt{b}-\sqrt{c})\sqrt{a}=\sqrt{bc}$$

$$\sqrt{a}=\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$$

両辺を平方して，　$a=\dfrac{bc}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2}$

ここで，$b=9$，$c=4$ より，大円直径：$a=36$（寸）

〈解説〉奉納者は，大円直径　$a=\dfrac{b}{\left(\sqrt{\dfrac{b}{c}}-1\right)^2}$　と答えている。




上式は　$a=\dfrac{bc}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2}$　の分母，分子を $c$ で割った式を表している。

これは，答をソロバンで計算しやすくするための整理です。

大円の直径を $a$，中円の直径を $b$，小円の直径を $c$ とし，2円の接線の長さを $l$ とすると

$$l^2=\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)^2=ab \qquad \text{すなわち}\quad l=\sqrt{ab}$$

この式は，和算では基本公式としてよく使われています。この問題は，上式を使い，$\sqrt{ab}=\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$ として解かれたものと思います。上式の両辺を $\sqrt{abc}$ で割ると，　$\dfrac{1}{\sqrt{c}}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}}$

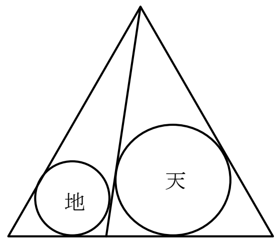
美しい関係式が導かれます。この式を和算では「累円術（るいえんじゅつ）」といい，大円と小円の間に小さい円を入れる，また同様に，円を入れる問題に発展拡張しています。

和算家になった気持ちで上記公式を覚えておいて下さい。

## 『中級問題』

2　図のように、正三角形内に斜線を描き、天円、地円を入れる。天円の直径を$a$ 、地円の直径を$b$ とするとき、正三角形の一辺の長さを求めよ。

（伊豫稲荷神社の算額）




解）右図のように記号をつけ，正三角形の一辺を$x$とする。

正三角形の面積を考えると

$\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{ACD}=\triangle\mathrm{ABC}$

が成り立つ。

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABD}&=\frac{1}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BD}+\mathrm{AD})\times\frac{1}{2}b\\&=\frac{1}{4}b(\mathrm{AB}+\mathrm{BD}+\mathrm{AD})\\&=\frac{1}{4}b(3x-\sqrt{3}\,a)\quad\cdots\cdots\ (※)\end{aligned}$$

同様に，$\triangle\mathrm{ACD}=\dfrac{1}{4}a(3x-\sqrt{3}\,b)$

また，　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}x=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$

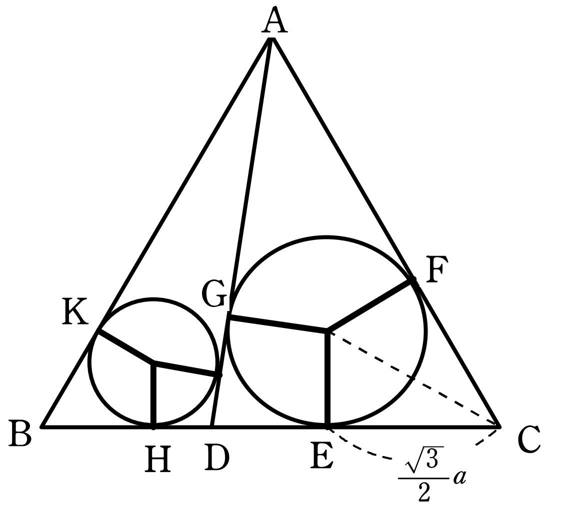
よって，$\dfrac{1}{4}b(3x-\sqrt{3}\,a)+\dfrac{1}{4}a(3x-\sqrt{3}\,b)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$

整理すると

$x^2-\sqrt{3}(a+b)x+2ab=0$　$\cdots\cdots$①

解の公式より，$x>\dfrac{\sqrt{3}}{2}(a+b)$ だから

$$x=\frac{\sqrt{3}(a+b)+\sqrt{3(a+b)^2-8ab}}{2}$$




（※）の導き方

$$\begin{aligned}&\mathrm{AB}+\mathrm{BD}+\mathrm{AD}=\mathrm{AB}+\mathrm{BD}+(\mathrm{DG}+\mathrm{AG})\\&=\mathrm{AB}+(\mathrm{BD}+\mathrm{DE})+\mathrm{AF}\\&=\mathrm{AB}+\mathrm{BE}+\mathrm{AF}\\&=\mathrm{AB}+(\mathrm{BC}-\mathrm{CE})+(\mathrm{AC}-\mathrm{CF})\\&=(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})-2\mathrm{CE}\\&=3x-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\\&=3x-\sqrt{3}\,a\end{aligned}$$

〈解説〉算額の奉納者は，正三角形の一辺$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(a+b)+\sqrt{\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2}(a+b)\right\}^2-2ab}$　と答えている。

①の2次方程式　$x^2-\sqrt{3}(a+b)x+2ab=0$ を求め，

$$x^2-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)x+2ab=0$$

として，解の公式を利用したものと思われる。

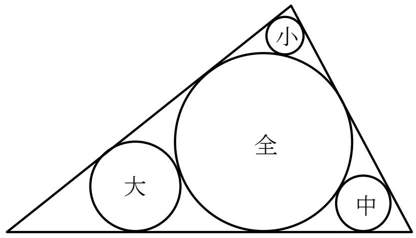
和算では，図形を取り扱う問題を総称して「容術」といいます。その中に面積を利用して鮮やかに解かれている問題が多々あります。

上記の問題はその代表的なものの一つと思い出題しました。

## 『上級問題』

3　図のように、三角形内に全円（内接円）と大円、中円、小円を入れる。大円の直径を９寸、中円の直径の４寸、小円の直径を１寸とするとき、全円の直径を求めよ。

（『改正諸術詳解』巻五）




(解)　右図のように記号をつけ，

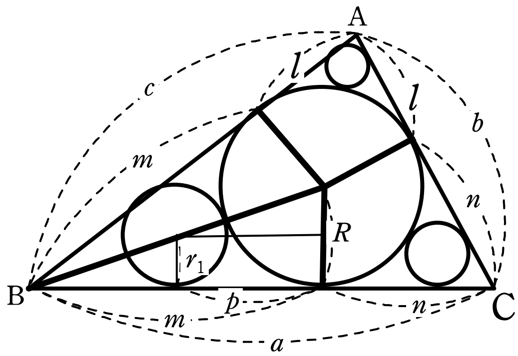
$BC=a,\ CA=b,\ AB=c$, 内接円の半径$=R$ とし，

$2s=a+b+c$ とおく。$a=m+n,\ b=n+l,\ c=l+m$

$2s=a+b+c=2(l+m+n)$

$s=l+m+n,$

$l=s-a, m=s-b, n=s-c$ より




ヘロンの公式

$S^2=s(s-a)(s-b)(s-c)=(l+m+n)lmn$

一方，$S=\dfrac{1}{2}(a+b+c)R=(l+m+n)R$

よって，$lmn=(l+m+n)R^2 \cdots\cdots$ ①

和算ではヘロンの公式を①式のように変形して公式としている。この公式①を使い解く。

大，中，小円の半径をそれぞれ $r_1, r_2, r_3$ とする。問題１の公式を使い，2円の接線の長さ $p$ は，$p=2\sqrt{Rr_1}$

太線で表された三角形に注目して，　$r_1 : R=(m-p):m$　　$(m-p)R=mr_1$

$$m=\frac{pR}{R-r_1}=\frac{2\sqrt{Rr_1}\,R}{R-r_1}$$

同様にして，　$n=\dfrac{2\sqrt{Rr_2}\,R}{R-r_2}$，　$l=\dfrac{2\sqrt{Rr_3}\,R}{R-r_3}$

この $l\ m, n$ を公式①に代入する。

$$\frac{8\sqrt{r_1r_2r_3}\sqrt{R}\,R^4}{(R-r_1)(R-r_2)(R-r_3)}=\left(\frac{2\sqrt{r_1}\sqrt{R}}{R-r_1}+\frac{2\sqrt{r_2}\sqrt{R}}{R-r_2}+\frac{2\sqrt{r_3}\sqrt{R}}{R-r_3}\right)R^3$$

両辺を $2\sqrt{R}\,R^3$ で割り，分母を払うと

$$4\sqrt{r_1r_2r_3}\,R=\sqrt{r_1}(R-r_2)(R-r_3)+\sqrt{r_2}(R-r_1)(R-r_3)+\sqrt{r_3}(R-r_1)(R-r_2)$$

展開整理する。

$$(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3})R^2-\{\sqrt{r_1}(r_2+r_3)+\sqrt{r_2}(r_1+r_3)+\sqrt{r_3}(r_1+r_2)+4\sqrt{r_1r_2r_3}\}R$$
$$+\sqrt{r_1r_2r_3}(\sqrt{r_1r_2}+\sqrt{r_2r_3}+\sqrt{r_3r_1})=0$$

$$\{R-(\sqrt{r_1r_2}+\sqrt{r_2r_3}+\sqrt{r_3r_1})\}\{(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3})R-\sqrt{r_1r_2r_3}\}=0 \cdots\cdots ②$$

ゆえに，　$R=\sqrt{r_1r_2}+\sqrt{r_2r_3}+\sqrt{r_3r_1}$　あるいは，$R=\dfrac{\sqrt{r_1r_2r_3}}{\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}}$

よって，条件を満たす $R$ は，　$R=\sqrt{r_1r_2}+\sqrt{r_2r_3}+\sqrt{r_3r_1}$

全円直径　$2R=\sqrt{(2r_1)(2r_2)}+\sqrt{(2r_2)(2r_3)}+\sqrt{(2r_3)(2r_1)}=11$（寸）

〈解説〉著者は

全円直径$=\sqrt{(2\sqrt{\text{中・小}}+\text{中}+\text{小})\text{大}}+\sqrt{\text{中・小}}$

と答えていますがソロバンでの計算をしやすくするための変形と思われる。上式は

$$\text{全円直径}=\sqrt{(\sqrt{\text{中}}+\sqrt{\text{小}})^2(\sqrt{\text{天}})^2}+\sqrt{\text{中・小}}$$
$$=\sqrt{\text{大・中}}+\sqrt{\text{中・小}}+\sqrt{\text{小・大}}$$

と表すのが一般的です。

和算では条件を満たす解を「得商」，他の解を「変商」といいます。

②式の変商　$R=\dfrac{\sqrt{r_1r_2r_3}}{\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}}$ も美しい式です。

これを満たす図形（問題）があるか。議論されています。

2次方程式の場合は早くからあることが知られていました。

3次方程式以上の「変商」に対応する図形があるか長く未解決でしたが，安島直円が『安子変商稿』（1777年）で解決しています。

下図が②式の変商　$R=\dfrac{\sqrt{r_1r_2r_3}}{\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}}$　に対応する図形です。

図が少し分かりにくいですが，問題の条件を満たしていることを確かめて下さい。