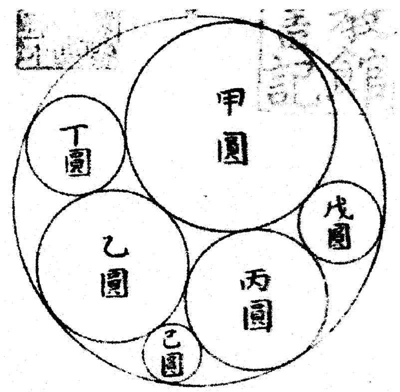
第51回愛媛和算研究会（令和６年７月27日（土））

谷本賢治

『雑題』巻五［５－1］の和算解と現代解（算変座標）について

1　はじめに

第47回愛媛和算研究会（令和４年７月31日（日））で「『雑題』五巻～八巻を読む［第４回］［５－３］［５－４］［５－５］の和算解について」を発表し、［５－１]の解説を次の様に述べた。



［５－１］

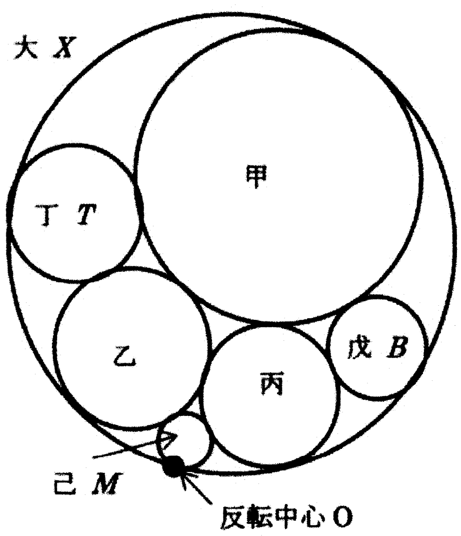
今、図のように、大円内に、甲、乙、丙、丁、戊、己の６円を容れる。只云う、丁円径872.3寸、戊円径671寸、己円径572寸のとき、大円径はいくらか。

この問題は『神壁算法』「東都愛宕山　　藤田貞資門人　東都麹町　橘田弥曽八」（天明８（1788）年２月）の算額問題である。

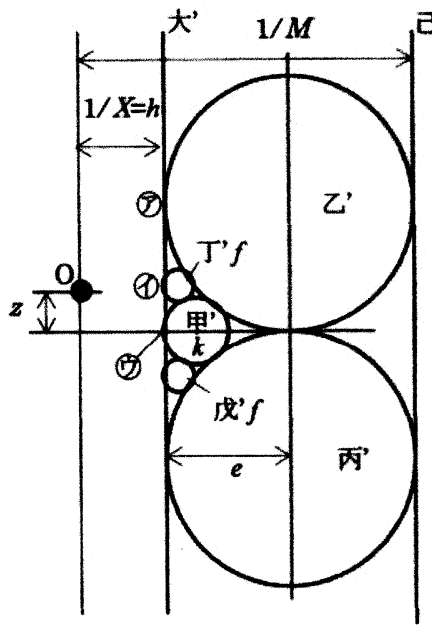
和算解は「デカルトの円定理」による。

現代解は群馬県和算研究会事務局長田部井勝稲氏著『精要算法　巻之下（幾何問題）』（一粒書房　2020）に反転法による現代解が掲載されている。

その元図と反転図が下図である。



元図



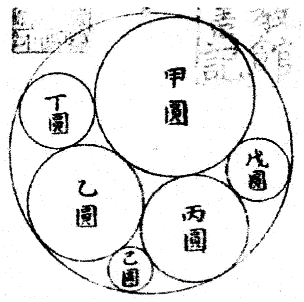
反転図

なお、和算解については触れなかった。その理由は、解義の１行目「此解依廉術」で導かれた丙円径に関する３つの１次方程式分からなかった。

その方法が分かったので、改めて［５－１］の和算解を紹介する。

2　［５－１］の和算解について

［５－１］



［問題］今、図のように、大円内に、甲、乙、丙、丁、戊、己の６円を容れる。只云う、丁円径872.3寸、戊円径671寸、己円径572寸のとき、大円径はいくらか。

（答曰）大円径　3,172寸

（術文）(丁＋戊)×己＋丁×戊＝天　33(丁×戊×己)＝地　とする。

$2\sqrt{(\text{丁}+\text{戊}+\text{己})\times\text{地}-8\text{天}^2}-\text{天}=\text{法}$ とする。

$\text{大円径}=\dfrac{\text{地}}{\text{法}}$

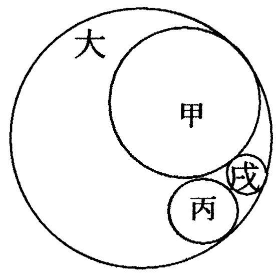
《解説》

最初に、解義の２行目にある丙円径に関する下記の３個の１次方程式について述べる。

① -2大甲乙戊＋(大甲戊＋大甲乙＋2甲乙戊－2大乙戊)丙＝0

② -2大甲乙己＋(大乙己＋大甲乙＋2甲乙己－2大甲己)丙＝0

③ 大甲乙丁＋(大甲乙－2大甲丁－2大乙丁＋2甲乙丁)丙＝0



［①の解法］

大、甲、戊、丙で三円矩合（デカルトの円定理）から

甲^{2}戊^{2}大^2＋(2甲^{2}戊^{2}大－2甲^{2}戊大^2－2甲戊^{2}大^2)丙

＋(甲^{2}戊^2＋戊^{2}大^2＋大^{2}甲^2－2甲戊大^2＋2甲^{2}戊大＋2甲戊^{2}大)丙^2＝0 ……ⓐ

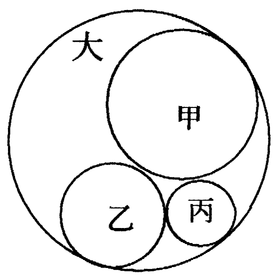
大、甲、乙、丙で三円矩合（デカルトの円定理）は、ⓐにおいて、戊→乙に変換する。

甲^{2}乙^{2}大^2＋(2甲^{2}乙^{2}大－2甲^{2}乙大^2－2甲乙^{2}大^2)丙

＋(甲乙^2＋乙^{2}大^2＋大^{2}甲^2－2甲乙大^2＋2甲^{2}乙大＋2甲乙^{2}大)丙^2＝0 ……ⓑ

ⓐ、ⓑから定数項を消去する。

ⓐ×乙^2－ⓑ×戊^2 から



{大^{2}甲^2(戊^2－乙^2)－2甲大^{2}乙戊(戊－乙)＋2甲^{2}乙大戊(戊－乙)}丙

＋2甲^{2}戊大^{2}乙(乙－戊)＝0

ここで (戊－乙)大甲 で割ると①が得られる。

① −2大甲乙戊＋(大甲戊＋大甲乙＋2甲乙戊−2大乙戊)丙＝0

［②の解法］

①で求めたⓑ、すなわち　大、甲、乙、丙で三円矩合（デカルトの円定理）から

甲^{2}乙^{2}大^2＋(2甲^{2}乙^{2}大−2甲^{2}乙大^2−2甲乙大^2)丙

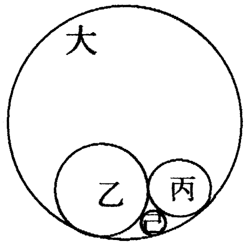
＋(甲^{2}乙^2＋乙^{2}大^2＋大^{2}甲^2−2甲乙大^2＋2甲^{2}乙大＋2甲乙^{2}大)丙^2＝0 ……ⓑ

次に、大、己、乙、丙で三円矩合（デカルトの円定理）は、ⓑにおいて、甲→己に変換する。

己^{2}乙^{2}大^2＋(2己^{2}乙^{2}大−2己^{2}乙大^2−2己乙大^2)丙

＋(己乙^2＋乙^{2}大^2＋大^{2}己^2−2己乙大^2＋2己^{2}乙大＋2己乙^{2}大)丙^2＝0……ⓒ

ⓑ、ⓒから定数項を消去する。ⓑ×己^2−ⓒ×甲^2 から



2大^{2}甲乙^{2}己(甲−己)

＋{乙^{2}大^2(己^2−甲^2)−2大^{2}甲乙己(己−甲)＋2大甲乙^{2}己(己−甲)}丙＝0

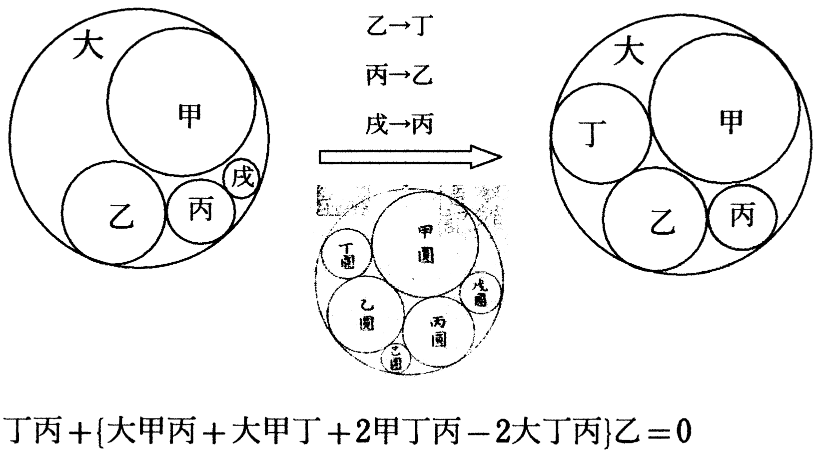
ここで　(己−甲)乙大で割ると

② −2大甲乙己＋(大乙己＋大甲乙＋2甲乙己−2大甲己)丙＝0

［③の解法］

① −2大甲乙戊＋{大甲戊＋大甲乙＋2甲乙戊−2大乙戊}丙＝0　において

乙→丁、丙→乙、戊→丙　に変換する。



−2大甲丁丙＋{大甲丙＋大甲丁＋2甲丁丙−2大丁丙}乙＝0

この式を丙について整理すると

③ 大甲乙丁＋(大甲乙−2大甲丁−2大乙丁＋2甲己丁)丙＝0

以上で、①、②、③が証明された。

それでは、和算解を説明する。

（解義）

廉術で求めて得られる丙径の式は、次の３件である。

① −2大甲乙戊＋(大甲戊＋大甲乙＋2甲乙戊−2大乙戊)丙＝0 ……$\boxed{\text{1式}}$

② −2大甲乙己＋(大乙己＋大甲乙＋2甲乙己−2大甲己)丙＝0 ……$\boxed{\text{2式}}$

③ 大甲乙丁＋(大甲乙−2大甲丁−2大乙丁＋2甲乙丁)丙＝0 ……$\boxed{\text{3式}}$

$\boxed{\text{1式}}$、$\boxed{\text{2式}}$、$\boxed{\text{3式}}$の定数項の大、甲、乙を省く。

④ −2戊＋(大甲戊＋大甲乙＋2甲乙戊−2大乙戊)丙＝0 ……$\boxed{\text{角式}}$

⑤−2己＋(大乙己＋大甲乙＋2甲乙己−2大甲己)丙＝0 ……$\boxed{\text{亢式}}$

⑥丁＋(大甲乙−2大甲丁−2大乙丁＋2甲乙丁)丙＝0　……$\boxed{\text{氐式}}$

$\boxed{\text{角式}}$と$\boxed{\text{亢式}}$から定数項を消去する。すなわち　④×己−⑤×戊　を計算する。

2己×(大甲戊＋大甲乙＋2甲乙戊−2大乙戊)

−戊×(大乙己＋大甲乙＋2甲乙己−2大甲己)＝0

乙について整理すると

⑦ 3大己甲戊＋(大甲己−3大戊己−大甲戊)乙＝0 ……$\boxed{\text{4式}}$

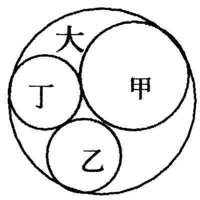
次に、$\boxed{\text{亢式}}$と$\boxed{\text{氐式}}$から定数項を消去する。すなわち　⑤×丁＋⑥× (2己)

丁×(大乙己＋大甲乙＋2甲乙己−2大甲己)

＋2己×(大甲乙−2大甲丁−2大乙丁＋2甲己)＝0

乙について整理すると

⑧ 6大甲己丁＋(3大丁己−2大甲己−大甲丁−6甲丁己)乙＝0 ……$\boxed{\text{5式}}$



ここで、大、甲、乙、丁で三円矩合（デカルトの円定理）

⑨ 大^{2}甲^{2}丁^2＋(−2大^{2}甲^{2}丁−2大^{2}甲丁^2＋2大甲^{2}丁^2)乙

＋(2大甲^{2}丁＋2大甲丁^2−2大^{2}甲丁＋大^{2}甲^2＋大^{2}丁^2＋甲^{2}丁^2)乙^2＝0 ……$\boxed{\text{6式}}$

ここで$\boxed{\text{4式}}$、$\boxed{\text{5式}}$ から乙を消去する。

そこで、この２つの式の定数項の３大甲己を省略する

⑩戊＋(大甲己−3大戊己−大甲戊)乙＝0 ……$\boxed{\text{変４式}}$

⑪2丁＋(3大丁己−2大甲己−大甲丁−6甲丁己)＝0 ……$\boxed{\text{変５式}}$

$\boxed{\text{変４式}}$、$\boxed{\text{変５式}}$　から乙を消去すると

2丁×(大甲己−3大戊己−大甲戊)＝戊×(3大丁己−2大甲己−大甲丁−6甲丁己)

甲について整理すると

⑫ 9大丁己戊＋(−6己丁戊−2大己戊−2大己丁＋大丁戊)甲＝0 ……$\boxed{\text{7式}}$

$\boxed{\text{5式}}$、$\boxed{\text{6式}}$から定数項を消去する。$\boxed{\text{5式}}$×大甲丁−$\boxed{\text{6式}}$×６丁　から

⑬ $(10大^2甲^2丁己+15大^2丁^2甲己-18大甲^2丁^2己-大^2甲^2丁^2)$
$-(12大丁甲^2己+12大甲丁^2己-12大^2甲丁己+6大^2甲^2己+6大^2丁^2己+6丁^2甲^2己)乙=0$
……$\boxed{尾式}$

$\boxed{尾式}$と$\boxed{5式}$から継乗によって乙を消去する。

$-6大甲乙丁(12大丁甲^2己+12大甲丁^2己-12大^2甲丁己+6大^2甲^2己+6大^2丁^2己+6丁^2甲^2己)$
$+(3大丁己-2大甲己-大甲丁-6甲丁己)(10大^2甲^2丁己+15大^2丁^2甲己-18大甲^2丁^2己-大^2甲^2丁^2)=0$

この式を甲について整理する。

⑭ $81大^2丁^2己^2-(72大丁^2己^2+72大^2丁己^2+18大^2丁^2己)甲$
$+(16大^2己^2+48大丁己^2-8大^2丁己^2+大^2丁^2+24大丁^2己+144丁^2己^2)甲^2=0$ ……$\boxed{8式}$

$\boxed{7式}$と$\boxed{8式}$の定数項を消去する。$\boxed{8式}\times戊-\boxed{7式}\times 9大丁己$ から

⑮ $9大丁己(-6己丁戊-2大己戊-2大己丁+大丁戊)$
$+戊(16大^2己^2+48大丁己^2-8大^2丁己^2+大^2丁^2+24大丁^2己+144丁^2己^2)甲=0$……$\boxed{南式}$

$\boxed{7式}$と$\boxed{南式}$から甲を継乗で消去すると

$9大丁己戊^2(-6己丁戊-2大己戊-2大己丁+大丁戊)$
$+戊(16大^2己^2+48大丁己^2-8大^2丁己^2+大^2丁^2+24大丁^2己+144丁^2己^2)\times 9大丁己戊=0$

大について整理すると

⑯ $(己^2丁^2+己^2戊^2+丁^2戊^2-2己^2丁戊-2己丁^2戊-2己丁戊^2)大^2$
$+2(丁己^2戊^2+己^2丁^2戊+己丁^2戊^2)大+33丁^2己^2戊^2=0$

⑰ $地=丁己戊$ 、 $角=丁+己+戊$ 、 $天=丁己+己戊+戊丁$ とおくと ⑯は

⑱ $(天^2-4角地)大^2+2地天大+33地^2=0$

⑯に33をかけると

⑲ $天^2大^2+66地天大+33^2地^2=(132角地-32天^2)大^2$

ここで $33丁己戊=地$ (再度「地」を使う)とおくと

$天^2大^2+2地天大+地^2=(4角地-32天^2)大^2$

$(天大+地)^2=(4角地-32天^2)大^2$ 　 $天大+地=2\sqrt{角地-8天^2}\,大$

$(天-2\sqrt{角地-8天^2})大+地=0$

$$大=\frac{地}{-天+2\sqrt{角地-8天^2}}$$

$地=33丁己戊$ 、 $角=丁+己+戊$ 、 $天=丁己+己戊+戊丁$ だから

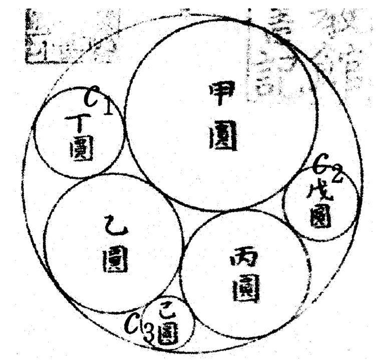
⑳ $$大=\frac{33丁己戊}{-(丁己+己戊+戊丁)+2\sqrt{33丁己戊(丁+戊+己)-8(丁己+己戊+戊丁)^2}}$$

…… (答)

これは術文に合う。

3　［５－１］を「算変座標」で解く

第49回愛媛和算研究会（令和５年７月30日（日））で、「［９－１］～［９－７］の和算解及び［９－８］の現代解（算変座標）」を発表した。後日、［５－１］［９－８］の現代解（算変座標）について、平田浩一先生からより簡素な算変座標を使った計算方法をご教示いただいた。



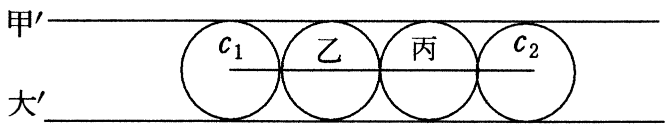
これまで、［５－１］を算変座標で試みたが全く歯が立たなかった。それは、基準３円がが互いに接している場合のみ解いていたためである。［５－１」は、円径が与えられいるのは、丁円、戊円、己円なので、基準３円 c_1、c_2、c_3 を丁円、戊円、己円とすると、これらは互いに接していない。

だから、定義に従って $s(c_1 . c_2)=\dfrac{d^2-r_1{}^2-r_2{}^2}{2r_1r_2}$ で計算しようとしたがどうにもならなかった。理由は、算変座標理論の「反転不変」を理解していなかったからである。

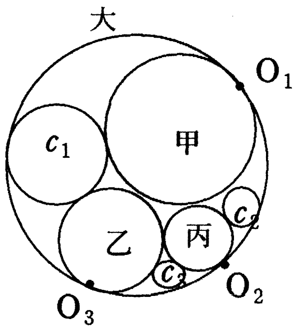
反転不変であることから、$s(c_1 , c_2)=\dfrac{d^2-r_1{}^2-r_2{}^2}{2r_1r_2}$ を求める方法を解説する。

(1)　$s(c_1 , c_2)$ の求め方

大円と甲円の接点 O_1 を反転中心として反転させる。



［反転図］



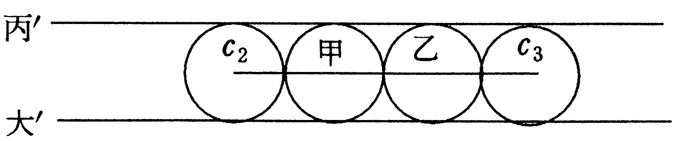
［原図］

反転図の円の半径は全て等しいから、それを r とすると

$$s(c_1 , c_2)=\frac{(6r)^2-r^2-r^2}{2r^2}=\frac{34r^2}{2r^2}=17$$

(2)　$s(c_2 , c_3)$ の求め方

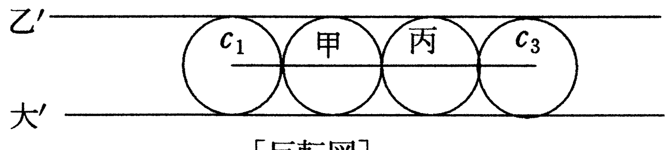
大円と丙円の接点 O_2 を反転中心として反転させる。



［反転図］

(3)　$s(c_2, c_3)$ の求め方

大円と乙円の接点 O_3 を反転中心として反転させる。



［反転図］

(2) の $s(c_2, c_3)$ と (3) の $s(c_2, c_3)$ は、反転図から (1) と同じ値になることは明らかである。したがって、$s(c_1, c_2)=s(c_2, c_3)=s(c_2, c_3)=17$　である。

なお、この値は次の定理から簡単に求まる。

［定理］放物線型円鎖 c_1、c_2、……、c_n に対して、c_i と c_j の反転距離 $s(c_i, c_j)$ について

$$s(c_i, c_j)=2(j-i)^2-1$$

が成り立つ。

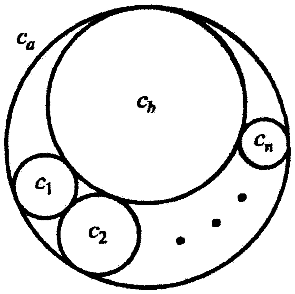
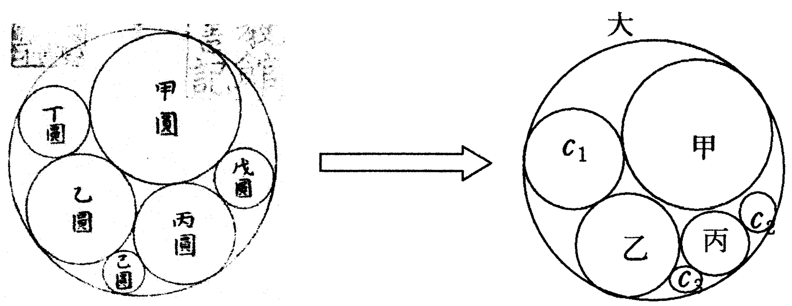


図１　放物型円鎖

証明は、(1) と同じ反転方法である。

（出典：平田浩一　『累円術無寄』について－算変座標で解く－　数学史研究 III－1－3(2023)）

（解法）



基準３円 c_1、c_2、c_3 を丁円、戊円、己円とする。円の向きは大円が時計回り、他の円はすべて反時計回りとする。

外円の算変座標は $[1, 1, 1]$ である。また、$s(c_1, c_2)=s(c_2, c_3)=s(c_2, c_3)=17$ から

基準距離は $(e_1, e_2, e_3)=(17, 17, 17)$ である。

半径公式から　$r=\dfrac{\sigma r_1 r_2 r_3}{\kappa-\sqrt{(\sigma+\tau)\lambda}}$

σ、τ、κ、λ　を求めればよい。

$$\sigma=e_1{}^2+e_2{}^2+e_3{}^2+2e_1e_2e_3-1=10692$$

$$\tau=2(e_1+e_2e_3)s_1s_3+2(e_2+e_3e_1)s_3s_1+2(e_3+e_1e_2)s_1s_2$$
$$+(1-e_1{}^2)s_1{}^2+(1-e_2{}^2)s_2{}^2+(1-e_3{}^2)s_3{}^2=972$$

$\sigma+\tau=11664=108^2$

$\kappa=(e_2s_3+e_3s_2)r_2r_3+e_1s_1r_1(e_2r_3+e_3r_2)+(1-e_1{}^2)s_1r_2r_3$

$\quad+(e_3s_1+e_1s_3)r_3r_1+e_2s_2r_2(e_3r_1+e_1r_3)+(1-e_2{}^2)s_2r_3r_1$

$\quad+(e_1s_2+e_2s_1)r_1r_2+e_3s_3r_3(e_1r_2+e_2r_1)+(1-e_3{}^2)s_3r_1r_2$

$\quad=324(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)$

$\lambda=2r_1r_2r_3(e_1+e_2e_3)r_1+(1-e_1{}^2)r_2{}^2r_3{}^2$

$\quad+2r_1r_2r_3(e_2+e_3e_1)r_2+(1-e_2{}^2)r_3{}^2r_1{}^2$

$\quad+2r_1r_2r_3(e_3+e_1e_2)r_3+(1-e_3{}^2)r_1{}^2r_2{}^2$

$\quad=612r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)-288(r_1{}^2r_2{}^2+r_2{}^2r_3{}^2+r_3{}^2r_1{}^2)$

$\quad=1188r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)-288(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)^2$

$\quad=6^2\{33r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)-8(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)^2\}$

$$r=\frac{10692r_1r_2r_3}{324(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)-\sqrt{108^2\times6^2\{33r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)-8(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)^2\}}}$$

$$=\frac{10692r_1r_2r_3}{324(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)-108\times6\sqrt{33r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)-8(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)^2}}$$

$$=\frac{33r_1r_2r_3}{(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)-2\sqrt{33r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)-8(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)^2}}$$

$r_1=436.15$ 、 $r_2=335.5$ 、 $r_3=286$ を代入すると

$$r=\frac{1381046731}{367020.225-2\sqrt{383033310939.923}}$$

$$=\frac{1381046731}{367020.225-2\times618896.85}$$

$$=\frac{1381046731}{-870773.475}$$

$$=-1586$$

したがって　大円径は3172寸である。

答曰と一致する。