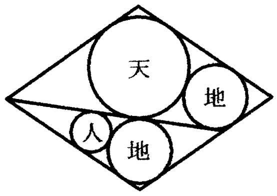
4.8 山崎富太郎

【問題文】

（右）



図のように、菱形を線分で分け、その上側に天円と地円を容れ、下側に地円と人円を容れる。天円の直径が 24 寸 8 分 4 厘 9 毛 8 糸のとき、人円の直径を求めよ。

【現代解】

天円、地円、人円の半径をそれぞれ r_1, r_2, r_3 とする。補助定理 5 において円 O_2 と円 O_3 が等しい場合を考えると、方程式

$$4r_1^3 - 4r_1^2 r_2 - 3r_1 r_2^2 - r_2^3 = 0 \tag{1}$$

が得られる。そこで $r_2 = xr_1$ とおいて方程式

$$x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = 0 \tag{2}$$

を解くと、実解はただ一つでその近似解は $x_1 \fallingdotseq 0.634365293$ である。

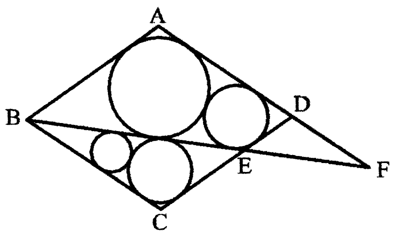


図 13: 山崎の問題

また、図 13 で △ABF と △CEB は相似となるため、比例関係 $r_1 : r_2 = r_2 : r_3$ が成り立ち、

$$r_3 = x_1^2 r_1 \tag{3}$$

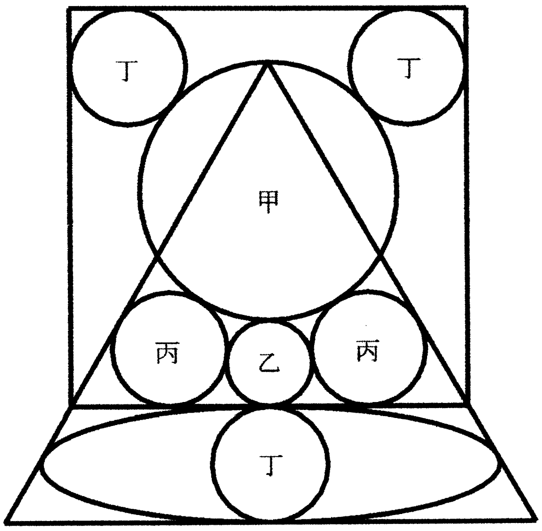
である。従って、天円直径を $2r_1 = 24.8498$ とするとき、人円直径 $2r_3 \fallingdotseq 10.0000397$ である。

【算額の解】

算額の術日には、方程式 (2) の解を求め、その自乗を天円直径に乗ずるとあり、現代解と一致している。また答日にも「10.0000 寸有奇」とあり、正確に値が求められている。

【問題文】

（左）



図のように、正三角形と正方形が交わってできる図形内に楕円、その先端に甲円を容れる。その交わったすき間に乙円 1 個、丙円 2 個、丁円 3 個を容れる。楕円の長径が与えられたとき、正方形の 1 辺の長さを求めよ。

【現代解】

図のように、正三角形を ABC、正方形を DEFG、辺 EF の中点を H とする。甲円の中心を O_1、乙円の中心を O_2、右の丙円の中心を O_3、右上の丁円の中心を O_4、線分 O_4O_1 を斜辺とする直角三角形を $\triangle O_4O_1I$ とする。また、楕円の長径の長さを $2a$、正方形の 1 辺の長さを b、正三角形の 1 辺の長さを c とする。甲円、乙円、丙円、丁円のそれぞれの半径を r_1, r_2, r_3, r_4 とする。

補助定理 4 により甲乙丙円の半径の間には次の関係式が成り立つ。

$$r_1(r_3 - r_2) = r_2^2 \tag{4}$$

線分 AH に着目すると、

$$2r_1 + 2r_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}b \tag{5}$$

補助定理 3 を用いて線分 HF に着目すると、

$$2\sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{3}r_3 = \frac{1}{2}b \tag{6}$$

ここで、$\sqrt{r_2} = x$、$\sqrt{r_3} = y$ とおくと、

$$r_1(y^2 - x^2) = x^4 \tag{7}$$

$$2r_1 + 2x^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}b \tag{8}$$

$$2xy + \sqrt{3}y^2 = \frac{1}{2}b \tag{9}$$

の 3 式となる。

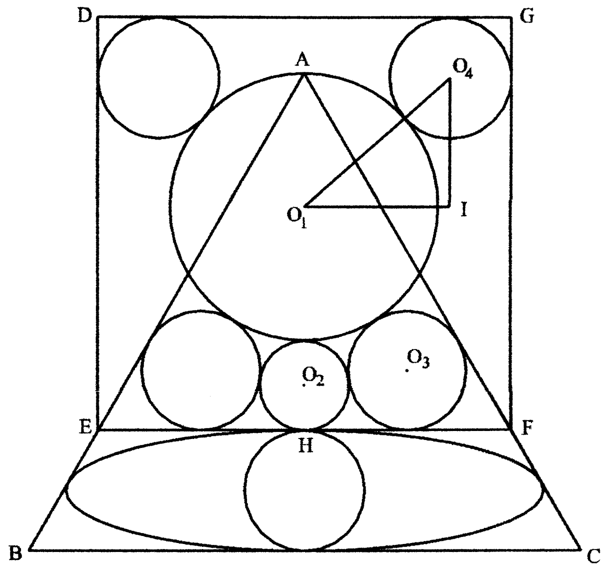


図 14: 左の問題

ここで、(7) と (8) から r_1 を消去すると、

$$\sqrt{3}bx^2 - \sqrt{3}by^2 + 4x^2y^2 = 0$$

この式と (9) から x を消去すると、

$$\sqrt{3}b^3 - 8b^2y^2 - 20\sqrt{3}by^4 + 48y^6 = 0$$

そこで、$b = \sqrt{3}ty^2 (= \sqrt{3}tr_3)$ を代入して整理すると、整係数の 3 次方程式

$$3t^3 - 8t^2 - 20t + 16 = 0$$

となる。これを因数分解すると、

$$(t-4)(t+2)(3t-2) = 0$$

となり、3 解は $t = -2, \frac{2}{3}, 4$ である。

このうち、$t = -2 < 0$ は明らかに不適。また、$t = \frac{2}{3}$ のときは、$r_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}b = \mathrm{AH}$ となるのでこれも不適。従って $t = 4$ である。このとき、$r_3 = \frac{\sqrt{3}}{12}b = \frac{1}{6}\mathrm{AH}$ で、式 (6) から $r_2 = \frac{\sqrt{3}}{16}b = \frac{1}{8}\mathrm{AH}$、(5) から $r_1 = \frac{3\sqrt{3}}{16}b = \frac{3}{8}\mathrm{AH}$ となる。

$$r_1 = \frac{3\sqrt{3}}{16}b, \qquad r_2 = \frac{\sqrt{3}}{16}b, \qquad r_3 = \frac{\sqrt{3}}{12}b \tag{10}$$

次に丁円 O_4 の半径 r_4 を求めよう。直角三角形 $\triangle O_4O_1I$ に三平方の定理を用いると

$$(\frac{b}{2} - r_4)^2 + (b - r_1 - 2r_2 - r_4)^2 = (r_1 + r_4)^2 \tag{11}$$

となる。これに (10) を代入すると、

$$16r_4^2 - \left(48 - 4\sqrt{3}\right)br_4 - \left(10\sqrt{3} - 23\right)b^2 = 0$$

そこで、$r_4 = sb$ と置いて、方程式

$$16s^2 - \left(48 - 4\sqrt{3}\right)s - \left(10\sqrt{3} - 23\right) = 0$$

を解いて、

$$s = \frac{1}{8}\left(12 - \sqrt{3} \pm \sqrt{55 + 16\sqrt{3}}\right)$$

となる。数値的には $s = 0.146661,\ 2.42033$ となるが、後者は不適。従って、

$$s = \frac{1}{8}\left(12 - \sqrt{3} - \sqrt{55 + 16\sqrt{3}}\right) \tag{12}$$

である。

最後に等脚台形 EBCF については、高さが $2r_4 = 2sb$ であることから、

$$c = b + \frac{4\sqrt{3}}{3}sb = \left(1 + \frac{4\sqrt{3}}{3}s\right)b = \frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + s\right)b \tag{13}$$

である。また、長軸の長さが $2a$ の楕円が内接することから、補助定理 17 により

$$bc = 4a^2 \tag{14}$$

である。従って、

$$c^2 = 4 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + s\right)a^2 = 4 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{8}\left(12 + \sqrt{3} - \sqrt{55 + 16\sqrt{3}}\right)a^2$$

により、

$$c = 2a\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{6}\left(12 + \sqrt{3} - \sqrt{55 + 16\sqrt{3}}\right)} \tag{15}$$

となる。

【算額の解】

算額の術曰には、「12 を平方に開き、0.5 を加え、これを極と名づけ、6.375 を加えて、1.5 で割り、平方に開いて、これを極から引き、平方に開いて、楕円長径を乗じて、三角形の一辺を得る」とある。すなわち、

$$w = \sqrt{12} + 0.5$$

$$c = 2a\sqrt{w - \sqrt{\frac{w + 6.375}{1.5}}}$$

という式である。この式を整理すると (15) と一致する。