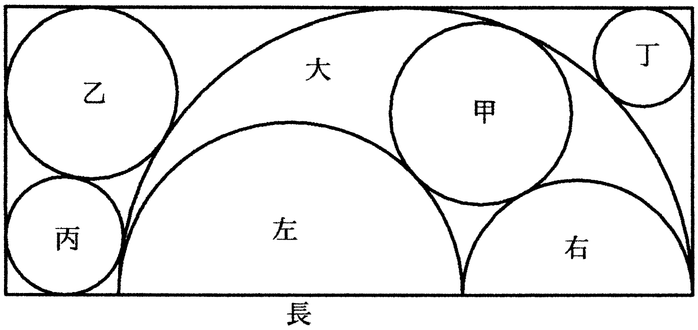
4.29 岩田清謹

【問題文】



図のように、長方形内に、大、左、右という半円がありその間に甲円、大半円の外側に乙、丙、丁の3円を入れる。左半円の直径は大半円の6割で、右半円の直径は大半円の4割である。丙円の直径が既知のとき、各円の直径及び長方形の横の長さはいくらか。

【現代解】

大半円の半径を r、左半円、右半円のそれぞれの半径を p, q とし、甲円、乙円、丙円、丁円のそれぞれの半径を x, y, z, w とする。また、長方形の横の長さを a とする。これらの変数相互の関係式を求めていくことにする。

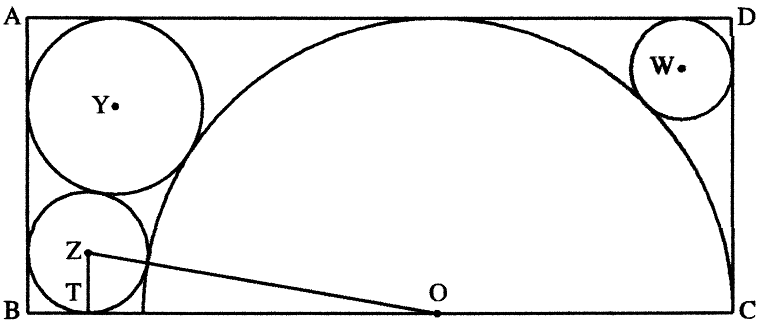


図 56: 大半円、乙円、丙円、丁円

最初に大半円、乙円、丙円について考える。図のように長方形を ABCD とし、大半円、乙円、丙円のそれぞれの中心を O, Y, Z とし、Z から辺 BC に引いた垂線を ZT とする。乙円の半径 y、丙円の半径 z と長方形の縦の長さ r に補助定理 7(1) を用いると、

$$\sqrt{r} = \sqrt{y} + \sqrt{z} \tag{1}$$

で、乙円の半径 y、大半円の半径 r と長方形の横の長さ a に補助定理 7(1) を用いると、

$$\sqrt{a} = \sqrt{y} + \sqrt{r} \tag{2}$$

となる。また、$\triangle$ZTO に三平方の定理を用いて、

$$z^2 + (a - z - r)^2 = (z + r)^2$$

となりこれを整理すると

$$a - z = \sqrt{2ar} \tag{3}$$

である。ここで、$\sqrt{r} = R,\ \sqrt{y} = Y,\ \sqrt{z} = Z,\ \sqrt{a} = A$ とおくと、3 式は

$$R = Y + Z, \quad A = Y + R, \quad A^2 - Z^2 = \sqrt{2}AR$$

となり、この連立方程式を解くことで、

$$R = \frac{3+\sqrt{2}}{2}Z, \quad Y = \frac{1+\sqrt{2}}{2}Z, \quad A = (2+\sqrt{2})Z$$

がえられる。従ってこれらを平方すれば

$$r = \frac{11+6\sqrt{2}}{4}z \tag{4}$$

$$y = \frac{3+2\sqrt{2}}{4}z \tag{5}$$

$$a = 2(3+2\sqrt{2})z \tag{6}$$

である。

大半円の半径 r と丁円の半径 w については、2 円に外接する正方形を考え、補助定理 7(1) を用いると、

$$\sqrt{2r} = \sqrt{r} + \sqrt{w}$$

であり、従って

$$w = (3-2\sqrt{2})r = \frac{9-4\sqrt{2}}{4}z \tag{7}$$

となる。

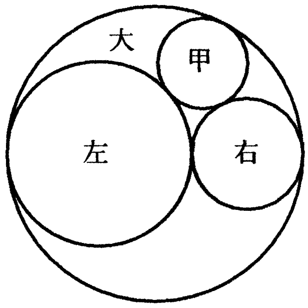


図 57: 大円、左円、右円、甲円

最後に、左円、右円、甲円については図 57 のように大円全体を見ながら考える。補助定理 19(3) の関係式

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{x} - \frac{1}{r}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{r^2}\right)$$

に左円の半径 p と右円の半径 q が

$$p = \frac{3}{5}r, \quad q = \frac{2}{5}r$$

であることを用いて整理すると、甲円の半径 x は

$$x = \frac{6}{19}r$$

となり、従って

$$p = \frac{3(11 + 6\sqrt{2})}{20} z, \quad q = \frac{11 + 6\sqrt{2}}{10} z \quad x = \frac{3(11 + 6\sqrt{2})}{38} z \tag{8}$$

である。

【算額の解】

算額の術日では、各長さを丙円直径で割った比を以下のように求めている。

$$\begin{aligned}
\frac{a}{2z} &= 3 + 2\sqrt{2} \\
\frac{2y}{2z} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{a}{2z} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{4} \\
\frac{2r}{2z} &= 3 \cdot \frac{2y}{2z} + \frac{1}{2} = \frac{11 + 6\sqrt{2}}{4} \\
\frac{2p}{2z} &= \frac{3}{5} \cdot \frac{2r}{2z} = \frac{3\left(11 + 6\sqrt{2}\right)}{20} \\
\frac{2q}{2z} &= \frac{2}{5} \cdot \frac{2r}{2z} = \frac{11 + 6\sqrt{2}}{10} \\
\frac{2x}{2z} &= \frac{\frac{2p}{2z} \cdot \frac{2q}{2z} \cdot \frac{2r}{2z}}{\left(\frac{2p}{2z}\right)^2 + \frac{2q}{2z} \cdot \frac{2r}{2z}} = \frac{3\left(11 + 6\sqrt{2}\right)}{38} \\
\frac{2w}{2z} &= \left(3 - 2\sqrt{2}\right) \cdot \frac{2r}{2z} = \frac{9 - 4\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

これらの結果はすべて現代解と一致する。