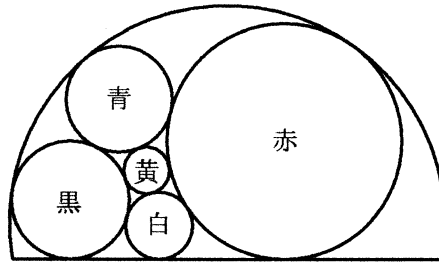


4.23 関家喜多次

【問題文】



図のように、円弧内に青、黄、赤、白、黒の5個の円がある。青、赤、黒の3個の円の直径が与えられたとき、白円の直径の長さを求めよ。

【現代解】

算額の図では5つの円が弓形内におさまっているが、実はこの弓形の円弧はこの問題の計算には関係していない。黒・白・赤の3円が一直線に接しているということがこの問題を解く重要なポイントである。図のように5円の中心を、A, B, C, X, Y とし、半径をそれぞれ a, b, c, x, y とする。直線と3円 B, Y, C の接点を T_B, T_Y, T_C とし、線分 $T_B T_C$ の長さを p と置く。

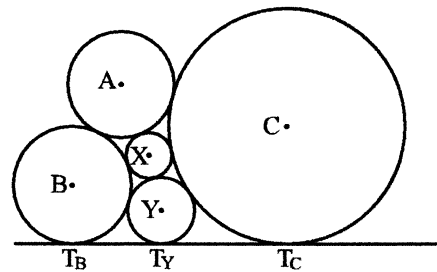


図 46: 5円と接線

最初に、4円 A, B, C, X に対して補助定理 21(1) を用いると、

$$(a+x)^2 p^4 - 16abcx p^2 - 8ax(a+x)(b+c)p^2 + 16a^2 x^2 (b-c)^2 = 0 \quad (1)$$

を得る。続いて、4円 X, B, C, Y に対しても同様に補助定理 21(1) を用いて、

$$(x+y)^2 p^4 - 16bcxy p^2 - 8xy(x+y)(b+c)p^2 + 16x^2 y^2 (b-c)^2 = 0 \quad (2)$$

を得るさらに、補助定理 3 により、 $T_B T_Y = 2\sqrt{by}$ 、 $T_Y T_C = 2\sqrt{cy}$ となるので、 $p = T_B T_Y + T_Y T_C$ より、

$$p^2 = 4y(b + 2\sqrt{bc} + c) \quad (3)$$

となる。

これで、この問題を解くための条件式はすべて出そろった。しかし (3) 式にルート記号が入っているのでこのままでは計算が厄介である。そこで、

$$\sqrt{b} = s, \quad \sqrt{c} = t \quad (4)$$

とにおいて、3式を書き直すと、

$$(a+x)^2 p^4 - 16a s^2 t^2 x p^2 - 8ax(a+x)(s^2+t^2)p^2 + 16a^2 x^2 (s^2-t^2)^2 = 0 \quad (5)$$

$$(x+y)^2 p^4 - 16s^2 t^2 x y p^2 - 8xy(x+y)(s^2+t^2)p^2 + 16x^2 y^2 (s^2-t^2)^2 = 0 \quad (6)$$

$$p^2 = 4y(s+t)^2 \quad (7)$$

となる。

これら3式から p, x を消去し、 y に関する方程式を導けばよい。そこで、(6)式に(7)式を代入して p を消去して整理すると、

$$4st(st-y)x - y^2(s+t)^2 = 0$$

となる。これより x は、

$$x = \frac{y^2(s+t)^2}{4st(st-y)} \quad (8)$$

と表される。そこで、(5)式に(7)式と(8)式代入して、根気よく整理すると、

$$(s+t)^4 y^3 - a(s+t)^2 (s^2 + 6st + t^2) y^2 + 8a s^2 t^2 (s^2 + 4st + t^2) y - 16a s^4 t^4 = 0 \quad (9)$$

となり、 y に関する3次方程式が得られる。

以上により、算額の問題の解としては、青、黒、赤の3円の半径 a, b, c が与えられたとき、(4)式で s, t を求め、それらを(9)式に代入し3次方程式を解くことで、白円の半径 y が求まることになる。また、黄円の半径 x が必要なときは(8)式を用いて計算すればよい。

【算額の解】

算額の術日には、

$$\text{白円直径 } (2y) = \left\{ 1 - \frac{2\sqrt{bc}}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2} \left(\sqrt{\frac{2(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2}{\sqrt{bc}} + 1} - \frac{4\sqrt{bc}}{a} - 1 \right) \right\} \times \text{青円直径 } (2a) \quad (10)$$

と示されている。これは現代解とは一致しない。この問題の解義は『容術』にあるが、これを調べると現代解と同じく補助定理 21(1) (『算法助術』の公式 72) を用いて解かれているが、式(5)と(6)の処理に誤りがみられ残念である。

図 47 は $a = b = 1, c = 2$ の場合の図である。このとき、(9) を解いて求めた値は $y \approx 0.5753$ で、(10) から求まる値は $y \approx 0.5663$ で誤差はわずかである。図は、左が(9)を用い、右が(10)を用いて描いた。右の図では青円と黄円の間少し隙間ができています。

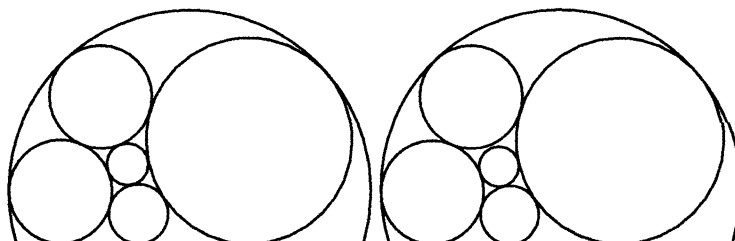


図 47: $a = b = 1, c = 2$ の場合の図