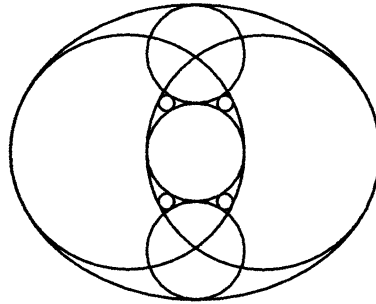


## 4.26 塩田民之丞

### 【問題文】



図のように、楕円内の短軸上に、中円3個を描き、その中円1個と楕円周上の1点（長軸上の先端）で接する大円2個を描く。その交わったところのすき間に小円4個を入れる。短軸の長さ2621寸、大円の直径を最大にするとき、小円の直径はいくらか。

### 【現代解】

楕円の長軸の長さを  $2a$ 、短軸の長さを  $2b$  とし、その方程式を  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  とする。中円の半径を  $r_1$ 、大円の半径を  $r_2$ 、小円の半径を  $r_3$  とする。また、左上の小円の中心の座標を  $(-p, r_1)$  とする。

中円と大円の半径については、

$$r_1 = \frac{b}{3}, \quad r_2 = \frac{a}{2} + \frac{b}{6} \quad (1)$$

である。

また、「大円の直径を最大とするとき」と問題にあるので、楕円上の点  $(a, 0)$  における曲率半径  $\frac{b^2}{a}$  と大円半径  $r_2$  が一致し  $\frac{b^2}{a} = \frac{a}{2} + \frac{b}{6}$  となり、これを整理すると

$$3a^2 + ab - 6b^2 = 0 \quad (2)$$

で、 $a, b > 0$  であることから

$$a = \frac{\sqrt{73} - 1}{6} b \quad (3)$$

を得る。

小円に関しては、図50のように、直角三角形  $O_3O_1P$  の三平方の定理

$$p^2 + r_1^2 = (r_1 + r_3)^2 \quad (4)$$

と、直角三角形  $O_3QO_2$  に三平方の定理

$$r_1^2 + (r_2 - r_1 + p)^2 = (r_2 - r_3)^2 \quad (5)$$

の関係式が成り立つので、この2式から  $p$  を消去すると、

$$(9b - 108r_3)a^2 + (216r_3^2 - 6b^2)a + b^3 + 12b^2r_3 + 72br_3^2 = 0$$

これに式(3)を代入したいのだが、最初に式(2)から得られる  $3a^2 = 6b^2 - ab$  を先に代入して、

$$(216r_3^2 + 36br_3 - 9b^2)a + 19b^3 - 204b^2r_3 + 72br_3^2 = 0$$

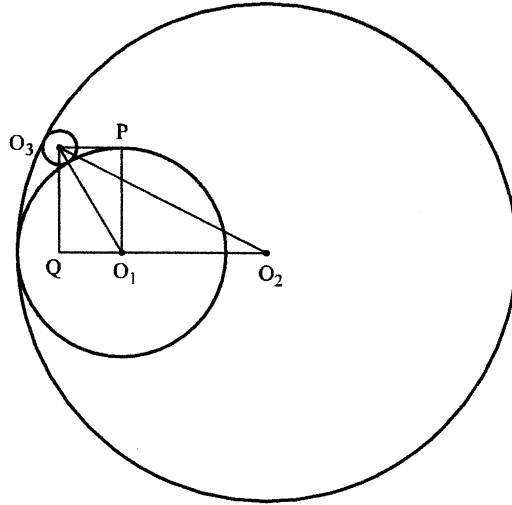


図 50: 塩田の問題

その後式 (3) を代入して整理すると、

$$(41 - 3\sqrt{73})b^2 + (12\sqrt{73} - 420)br_3 + (72 + 72\sqrt{73})r_3^2 = 0$$

ここで、 $b = tr_3$  とおき  $t$  の 2 次方程式

$$(41 - 3\sqrt{73})t^2 + (12\sqrt{73} - 420)t + (72 + 72\sqrt{73}) = 0 \quad (6)$$

を解くと、

$$t = \frac{3}{8} \left( 19 + \sqrt{73} \pm 4\sqrt{19 + \sqrt{73}} \right)$$

を得る。 $t = \frac{b}{r_3} > \frac{b}{r_1} = 3$  であることから、

$$t = \frac{3}{8} \left( 19 + \sqrt{73} + 4\sqrt{19 + \sqrt{73}} \right) \quad (7)$$

従って、

$$\text{小円直径} = 2r_3 = \frac{2b}{t} = \frac{16b}{3 \left( 19 + \sqrt{73} + 4\sqrt{19 + \sqrt{73}} \right)} \quad (8)$$

この式に  $2b = 2621$  を代入して値を求めると、小円直径  $\approx 144.00024$  となる。

### 【算額の解】

算額の答には、小円直径 144 寸有奇とあり、現代解と一致する。また術日には、

$$w = \frac{\sqrt{73} + 19}{16}$$

$$\text{小円直径} = \frac{1}{6(\sqrt{w} + w)} \cdot \text{短軸}$$

とあり、これは式 (8) と一致する。