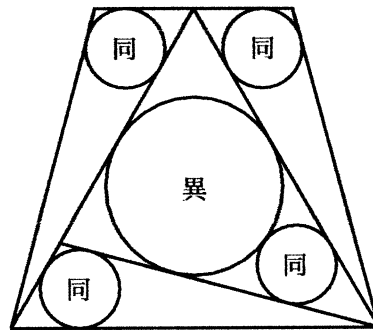


#### 4.10 井手上丈左衛門

##### 【問題文】



図のように、等脚台形内にある正三角形を線分によって分け、その間に、異円1個と同円4個を内接させる。異円の直径の長さが与えられたとき、等脚台形の上辺の長さを求めよ。

##### 【現代解】

図17のように、等脚台形を  $ABCD$ 、正三角形を  $EBC$ 、正三角形内の斜線を  $FC$ 、線分  $EC$  と異円との接点を  $G$ 、線分  $FB$  と同円との接点を  $H$  とする。また、正三角形の1辺の長さを  $a$ 、異円の半径を  $R$ 、同円の半径を  $r$  とし、等脚台形の上辺を  $AD = x$  とする。

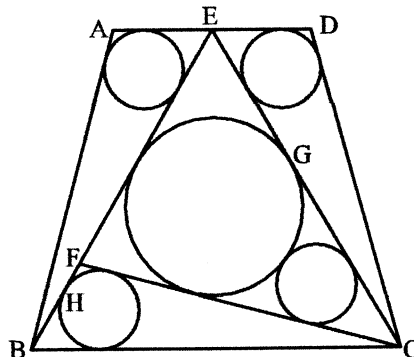


図 17: 井手上の問題

正三角形の高さが  $\frac{\sqrt{3}}{2}a$  で、正三角形の内接円の半径が  $\frac{\sqrt{3}}{6}a$  なので、正三角形  $EBC$  を斜線  $FC$  で分けた2つの領域に内接する異円と同円に補助定理8を用いると、

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a(R+r) - \frac{\sqrt{3}}{6}a = 2Rr$$

となり、これを整理すると

$$a^2 - 2\sqrt{3}(R+r)a + 8Rr = 0 \quad (1)$$

である。また、 $GC = a - \sqrt{3}R$  なので補助定理9を用いると

$$a = \sqrt{3}R + \frac{2R\sqrt{Rr}}{R-r} \quad (2)$$

となる。ここで(1)に(2)を代入して、 $t = \frac{r}{R}$  とおき整理すると

$$2t^3 - 7t^2 + 12t - 3 = 4\sqrt{3}t(1-t)t$$

となる。両辺を2乗すると

$$(2t^3 - 7t^2 + 12t - 3)^2 = 48(1-t)^2t^3 \quad (3)$$

となり、6次方程式

$$4t^6 - 76t^5 + 193t^4 - 228t^3 + 186t^2 - 72t + 9 = 0 \quad (4)$$

を得る。

ここから先は数値計算が必要となる。6次方程式(4)は数値計算により4つの実数解を持つ。

$$t \doteq 0.2297966479, \quad 0.4472007734, \quad 1.474533350, \quad 16.23342371$$

図17において $\angle ECF < 60^\circ$ であることと、 $\angle ECF = 60^\circ$ のとき $R:r = 3:1$ になることより、 $\frac{1}{3} < t < 1$ である。従ってこの問題に適する解は

$$t \doteq 0.4472007734 \quad (5)$$

である。

最後に $AD = x$ を求める必要があるが、 $\triangle DEC \equiv \triangle FBC$ に着目することで $x = 2FB = 2(FH + HB)$ である。ここで、 $HB = \sqrt{3}r$ であることと、補助定理10により $FH = \frac{a}{2} - \sqrt{3}R$ であることにより、

$$\begin{aligned} x &= a - 2\sqrt{3}R + 2\sqrt{3}r \\ &= \frac{2R\sqrt{Rr}}{R-r} - \sqrt{3}R + 2\sqrt{3}r \end{aligned}$$

さらに $r = tR$ を代入することで

$$x = \left\{ \frac{\sqrt{t}}{1-t} - \frac{\sqrt{3}}{2}(1-2t) \right\} 2R \quad (6)$$

となる。そこで(5)を代入することで

$$x \doteq 1.118266231 \times 2R$$

上辺の長さが求まる。

#### 【算額の解】

算額の術曰には、6次方程式

$$(2t^3 - 7t^2 + 12t - 3)^2 = 48(1-t)^2t^2$$

を解いて

$$x = \left\{ \frac{\sqrt{t}}{\frac{\sqrt{3}}{2}(1-t)} - (1-2t) \right\} 2R$$

とある。現代解との違いは、6次方程式の右辺の最後が $t^3$ ではなく $t^2$ となっていることと、三角中鉤率 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ の位置が違うことの2点である。前者については、この6次方程式だと3次式の積に因数分解できることにすぐ気づくはずなので、これは単なる転記ミスと思われる。後者については不明であるが、これも何らかの記載上のミスではないだろうか。