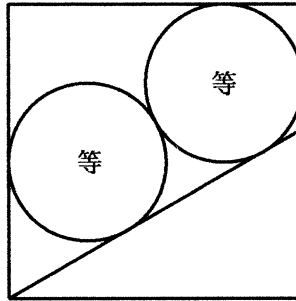


4.27 岩田源介

【問題文】

(右)



図のように、正方形に斜線を引き、等円を2個入れる。正方形の1辺が既知のとき、等円の直径はいくらか。

【現代解】

正方形の1辺の長さを a とし、等円の半径を r とする。

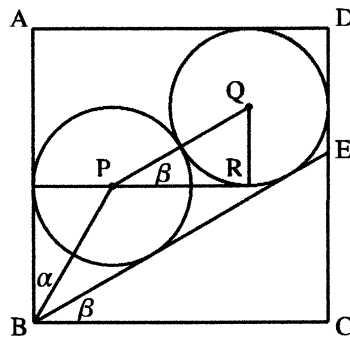


図 51: 岩田の問題 (右)

図のように正方形を $ABCD$ とし、2つの等円の中心を P, Q とする。また、点 R を $PR \parallel BC$ で $QR \parallel AB$ となる点とし、さらに、 $\angle ABP = \alpha$, $\angle EBC = \angle QPR = \beta$ とおくとき、

$$\beta = 90^\circ - 2\alpha$$

である。ここで AD の長さを計算すると、

$$a = 2r + 2r \cos \beta \tag{1}$$

である。次に AB の長さを計算すると、

$$a = r + 2r \sin \beta + r \cot \alpha \tag{2}$$

である。これら2式から

$$2 \cos \beta - 2 \sin \beta - \cot \alpha + 1 = 0$$

となり、これに $\sin \beta = \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$, $\cos \beta = \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$, $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ を代入して、分母を払い整理すると、

$$4\sin^2 \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha) - (\sin \alpha + \cos \alpha) = (\sin \alpha + \cos \alpha)(2\sin \alpha + 1)(2\sin \alpha - 1) = 0$$

となる。ここで $0 < \alpha < 45^\circ$ より $(\sin \alpha + \cos \alpha)(2\sin \alpha + 1) > 0$ なので、 $(2\sin \alpha - 1) = 0$ である。従って、

$$\alpha = 30^\circ, \quad \beta = 30^\circ \tag{3}$$

となる。この値を式 (1) に代入することで、

$$a = 2r + \sqrt{3}r$$

となり、

$$r = (2 - \sqrt{3})a \tag{4}$$

を得る。

【算額の解】

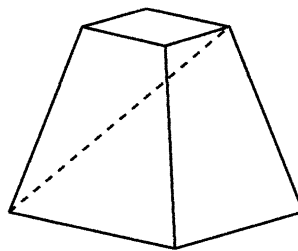
算額の術曰には、

$$\text{等円直径} = \frac{8a - \sqrt{48a^2}}{2}$$

と書かれている。これは (4) に一致する。

【問題文】

(中)



図のように、四角錐台をその対角線を含む平面で切ることができる図形がある。上部の正方形の一边が既知、また左上の角錐の体積が既知、また高さが既知のとき、下部の正方形の一边の長さはいくらか。

【現代解】

図 52 のように四角錐台を $ABCD-EFGH$ とし、対角線 DF を含む切り口の平面としては、直線 EG に平行な平面を考えるのが自然であろう。そうすると、切り口は四角形 $DIFK$ となる。ここで、3 線分 AC, IK, EG は平行である。従って切り口の上部の図形は正確には六面体 $ABCD-IFKD$ である。また、切り口の下部の図形は六面体 $IFKD-EFGH$ である。2 点 I, K を含み底面と平行な平面で四角錐台を切った切り口は正方形 $IJKL$ である。

既知の長さを、 $AB = a$ 、上部六面体 $ABCD - IFKD$ の体積を V 、四角錐台の高さを h とする。また、求めたい長さ $EF = b$ とする。

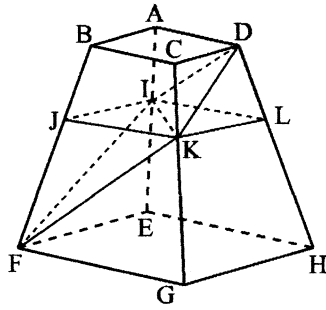


図 52: 岩田の問題 (中)

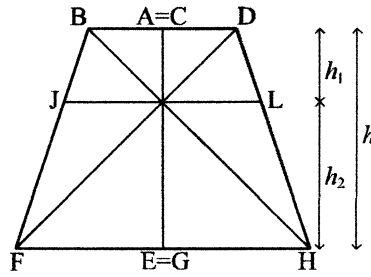


図 53: 横から見た図

図 53 は四角錐台を辺 CG 側の真横から見た図である。四角錐台 $ABCD-IJKL$ の高さを h_1 、体積を V_1 とし、四角錐台 $IJKL-EFGH$ の高さを h_2 、体積を V_2 とする。また、正方形 $IJKL$ の 1 辺の長さを c とする。 $BD : FH = a : b$ より、 $h_1 : h_2 = a : b$ となるので、

$$h_1 = \frac{ah}{a+b}, \quad h_2 = \frac{bh}{a+b}, \quad c = \frac{2ab}{a+b} \quad (5)$$

である。また、補助定理 22 により、

$$V_1 = \frac{1}{3}(a^2 + ac + c^2)h_1, \quad V_2 = \frac{1}{3}(b^2 + bc + c^2)h_2 \quad (6)$$

である。

三角錐 $DIKL$ の体積を V'_1 、三角錐 $IJKF$ の体積を V'_2 とすると。

$$V'_1 = \frac{1}{6}c^2h_1, \quad V'_2 = \frac{1}{6}c^2h_2 \quad (7)$$

である。従って、

$$V = V_1 - V'_1 + V'_2 = \frac{1}{3}(a^2 + ac)h_1 + \frac{1}{6}c^2h$$

これを整理すると、

$$V = \frac{a^2(a+2b)h}{3(a+b)}$$

となり、 b について解くと

$$b = \frac{3aV - a^3h}{2a^2h - 3V} \quad (8)$$

を得る。

【算額の解】

算額の術日には

$$w = \frac{3V}{h} - a^2$$

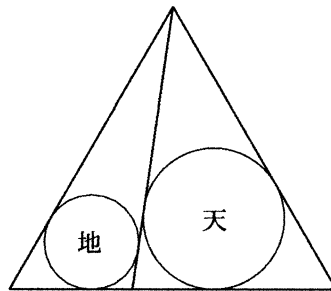
と置くとき

$$b = \frac{aw}{a^2 - w}$$

と書いてある。これは式 (8) に一致する。

【問題文】

(左)



図のように、正三角形内に斜線を引き、天円、地円を入れる。天円と地円の直径が既知のとき、正三角形の一辺の長さを求めよ。

【現代解】

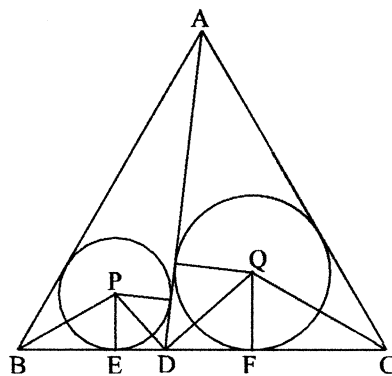


図 54: 岩田の問題 (左)

図 54 のように記号を定める。地円 P の半径を a 、天円 Q の半径を b とし、正三角形 ABC の一辺の長さを x とする。

$BE = \sqrt{3}a$ 、 $CF = \sqrt{3}b$ であることから、 $DE = p$ 、 $DF = q$ とおくと

$$x = \sqrt{3}(a+b) + p + q \tag{9}$$

となるので、 $p+q$ の長さが求まればよいことになる。

補助定理 23 により、

$$pq = ab \tag{10}$$

である。また、補助定理 10(2) により、

$$q - p = \sqrt{3}(b - a) \quad (11)$$

である。式 (10) と (11) から p, q が求まるが、必要なのは $p + q$ なので、

$$(p + q)^2 = (q - p)^2 + 4pq = 3(b - a)^2 + 4ab = 3a^2 - 2ab + 3b^2$$

により、

$$p + q = \sqrt{3a^2 - 2ab + 3b^2}$$

となる。これを (9) に代入することで、正三角形の 1 辺の長さは

$$x = \sqrt{3}(a + b) + \sqrt{3a^2 - 2ab + 3b^2} \quad (12)$$

である。

【算額の解】

算額の術目には、

$$w = \frac{\sqrt{3}}{2}(2a + 2b)$$

と置くとき

$$x = w + \sqrt{w^2 - 2 \cdot 2a \cdot 2b}$$

と書いてある。これは式 (12) と一致する。