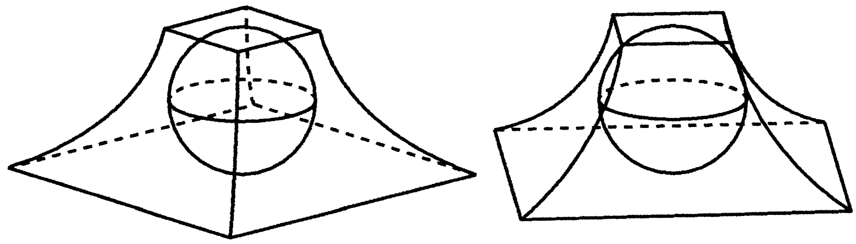
4.2 小嶌又兵衛

【問題文】



図のように、孤減方台に球を内接させる。方台の上面の 1 辺と下面の 1 辺の長さの和が 12 寸、積が 27 寸である。球の直径の長さが 4 寸であるとき、方台から球を除いた体積（外積）を求めよ。

【現代解】

孤減方台は、四角錐台のように上面と下面はともに正方形であるが、側面は円柱でくり抜かれた 4 つの曲面からなる図形である。

孤減方台に次のように座標軸をいれる。下面の中心 O と上面の中心 H を通る直線を z 軸とし、O を原点とする。下面は平面 $z=0$ に含まれ、方台の高さを h とするとき上面は平面 $z=h$ に含まれる。x 軸、y 軸は下面の正方形の辺と平行になるようにとる。

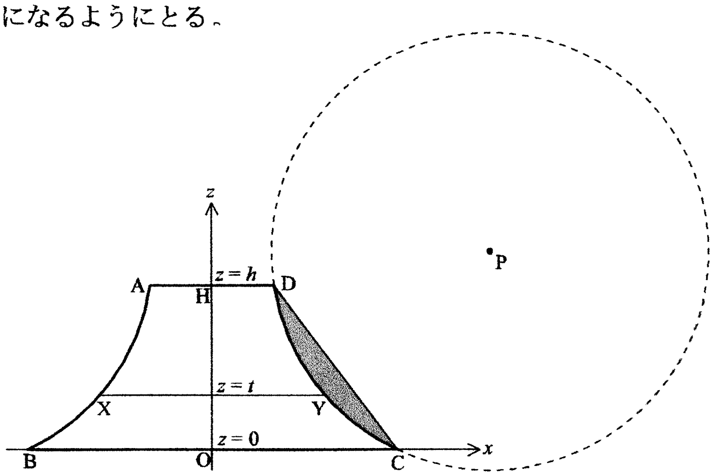


図 3: 孤減方台の切り口

図 3 は孤減方台を、下面の中心 O を含むように xz-平面で切った切り口 ABCD である。方台の切り口の右にある円 P は、方台の側面をくり抜く円柱の xz-平面による切り口である。円 P の方程式を

$$(x-p)^2 + (z-q)^2 = r^2 \tag{1}$$

とするとき、h, p, q, r について、次の関係式が成り立つ。

$$0 < h < q < r < p$$

この問題の本質は孤減方台の体積を求めることである。孤減方台を平面 $z = t\ (0 \leq t \leq h)$ で切った切り口は正方形で、その 1 辺の長さは図 3 での XY の長さに等しい。その面積は $S(z) = \mathrm{XY}^2 = 4\left(p - \sqrt{r^2 - (z-q)^2}\right)^2$

なので、孤減方台の体積 V_1 は定積分

$$V_1 = \int_0^h S(z)dz$$

を計算することで得られる。

体積 V_1 の計算方法であるが、大西佐兵衛の問題の解き方に倣って、図 3 に灰色で示した弓形 DYC の面積（弧積）を S_1 とおき、V_1 を S_1 で表すことを考えてみよう。

弧 DYC の式を

$$x = p - \sqrt{r^2 - (z-q)^2} = f(z) \tag{2}$$

とおく。2 点 D、C の xz-座標は

$$f(h) = a, \quad f(0) = b \tag{3}$$

とおくとき D(a,h)、C$(b,0)$ となる。そこで直線 DC の式を

$$x = b - \frac{b-a}{h}z = g(z) \tag{4}$$

とおく。このとき

$$V_1 = 4\int_0^h \{f(z)\}^2\,dz, \qquad S_1 = \int_0^h \{g(z) - f(z)\}\,dz \tag{5}$$

である。

そこで、

$$\{f(z)\}^2 = -2p\sqrt{r^2-(z-q)^2} + (\cdots z \text{ の 2 次式} \cdots)$$

と表されることと $g(z)$ が z の 1 次式であることにより

$$\{f(z)\}^2 = -2p\{g(z) - f(z)\} + (\cdots z \text{ の 2 次式} \cdots)$$

と表されるはずである。実際計算してみると

$$\{f(z)\}^2 = -2p\{g(z) - f(z)\} - z^2 + \frac{2}{h}(ap - bp + hq)z + 2bp - p^2 - q^2 + r^2$$

となる。この両辺を積分することで

$$\int_0^h \{f(z)\}^2\,dz = -2p\int_0^h \{g(z)-f(z)\}\,dz + \int_0^h \{-z^2 + \frac{2}{h}(ap-bp+hq)z + 2bp - p^2 - q^2 + r^2\}\,dz$$

$$\frac{V_1}{4} = -2pS_1 + \left[-\frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{h}(ap-bp+hq)z^2 + (2bp - p^2 - q^2 + r^2)z\right]_0^h$$

$$\frac{V_1}{4} = -2pS_1 - \frac{h^3}{3} - h(p^2 - ap - bp + q^2 - hq - r^2)$$

従って

$$V_1 = -8pS_1 - \frac{4h^3}{3} - 4h(p^2 - ap - bp + q^2 - hq - r^2) \tag{6}$$

となる。

次に式 (3) の条件を整理すると

$$p^2 - 2ap + q^2 - 2hq - r^2 = -(a^2 + h^2) \tag{7}$$

$$p^2 - 2bp + q^2 - r^2 = -b^2 \tag{8}$$

となるので、この 2 式を加えることで

$$2(p^2 - ap - bp + q^2 - hq - r^2) = -(a^2 + b^2 + h^2)$$

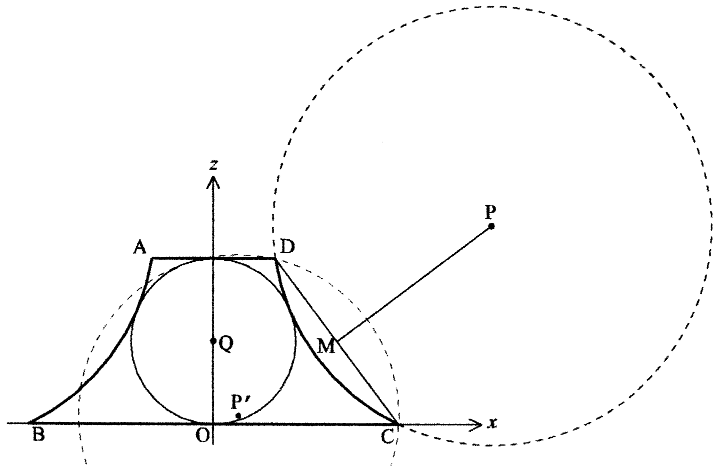


図 4: 小嶌の孤減方台

となり、これを式 (6) に代入して

$$V_1 = 2h\left(a^2 + b^2 + \frac{h^2}{3}\right) - 8pS_1 \tag{9}$$

が得られる。これが孤減方台の体積公式である。

小嶌が問題にしている孤減方台は、図 4 のように内部に球 Q があり上面下面に接しかつ 4 つの側面にも接しているものである。この条件を加えて孤減方台の体積の式を書き換えてみることにしよう。球 Q の半径は $\frac{h}{2}$ で、$\mathrm{PQ} = r + \frac{h}{2}$ となるので

$$p^2 + \left(q - \frac{h}{2}\right)^2 = \left(r + \frac{h}{2}\right)^2$$

$$p^2 + q^2 - hq - r^2 - hr = 0 \tag{10}$$

が成り立つ。

ここで、(7) − (8) と (7) + (8) − 2 × (10) を計算することで

$$q = \frac{a^2 - b^2 + h^2 - 2ap + 2bp}{2h} \tag{11}$$

$$r = \frac{-a^2 - b^2 - h^2 + 2ap + 2bp}{2h} \tag{12}$$

が得られる。この q, r を (8) に代入することで p の 2 次方程式

$$(4ab - h^2)p^2 - 2ab(a + b)p + a^2b^2 = 0$$

が得られる。この 2 次方程式は正の 2 実解

$$p = \frac{ab}{4ab - h^2}\{a + b \pm \sqrt{(b - a)^2 + h^2}\}$$

を持つ。この 2 解は「2 点 C, D を通り円 Q に接する円の中心 P の x 座標」を求めたものであり、p の小さい方の解は図 4 の円 P′ に相当するので題意に適していない。また、線分 CD の長さを c とするとき、

$$c = \sqrt{(b - a)^2 + h^2} \tag{13}$$

となり、

$$p = \frac{ab}{4ab - h^2}(a + b + c)$$

である。ここで、$(a + b + c)(a + b - c) = 4ab - h^2$ であることに注意すると

$$p = \frac{ab}{a + b - c} \tag{14}$$

である。従って (9) に代入することで、小嶌の問題の孤減方台の体積は

$$V_1 = 2h\left(a^2 + b^2 + \frac{h^2}{3}\right) - \frac{8ab}{a+b-c}S_1 \tag{15}$$

となる。従って、孤減方台の体積 V_1 から球 Q の体積 $\frac{1}{6}\pi h^3$ を引くことで、求める外積 V は

$$V = 2h\left(a^2 + b^2 + \frac{h^2}{3}\right) - \frac{8ab}{a+b-c}S_1 - \frac{1}{6}\pi h^3 \tag{16}$$

となる。

この後は弧積 S_1 を求めればよいのだが、さすがにそれを a, b, h の数式で簡潔に表すのは困難である。そこでここから先は算額に述べられている具体的な数値を使うことにする。「方台の上面の 1 辺と下面の 1 辺の長さの和が 12 寸、積が 27 寸、球の直径の長さが 4 寸」とあるので、$2a + 2b = 12,\ 4ab = 27,\ h = 4$ より

$$a = \frac{3}{2}, \qquad b = \frac{9}{2}, \qquad h = 4, \qquad c = 5$$

である。式 (14), (11), (12) より

$$p = \frac{27}{4}, \qquad q = \frac{77}{16}, \qquad r = \frac{85}{16}$$

となる。また、線分 CD の中点を M とし、MP $= k$ とおくとき

$$k = \frac{75}{16}$$

である。

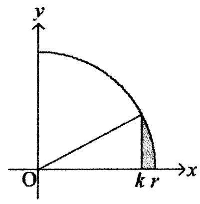


図 5: S_1 の面積計算

従って弧積 S_1 は図 5 の灰色部分の面積を 2 倍にしたものなので、次の式で得られ、補助定理 1 を用いて計算すると

$$S_1 = 2\int_k^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = r^2 \cos^{-1}\frac{k}{r} - k\sqrt{r^2 - k^2} = \frac{7225}{256}\cos^{-1}\frac{15}{17} - \frac{375}{32} \tag{17}$$

となり、その近似値は $S_1 = 2.109147\cdots$ となる。

これらを (16) に代入することで

$$V = \frac{41063}{48} - \frac{195075}{128}\cos^{-1}\frac{15}{17} - \frac{32\pi}{3} \tag{18}$$

となる。この近似値は $V = 75.262396\cdots$ である。

【算額の解】

算額の術日には簡略された式が書かれているが、小嶌が著した『容術』には詳しい計算方法が述べられており、式 (16) と同じものを得ている。しかしながら『容術』での計算をよく見ると、小嶌はこの弧積 S_1 の級数による計算を間違えて、$S_1 = 2.18658874049\cdots$ としてしまったため、答が「七十一寸有奇」となってしまった。数式としては正確に解を求めているのに、数値で計算間違いをしたのは残念なことである。

また、式 (16) は c の中も含め a と b の基本対称式である $a + b$ と ab で表されている。式としてはここでは確認していないが、S_1 は r と c で決まるものなので、S_1 も a, b の基本対称式で表されるはずである。その対称性を意識した上で「方台の上面の 1 辺と下面の 1 辺の長さの和が 12 寸、積が 27 寸」という出題をしたものと思われる。