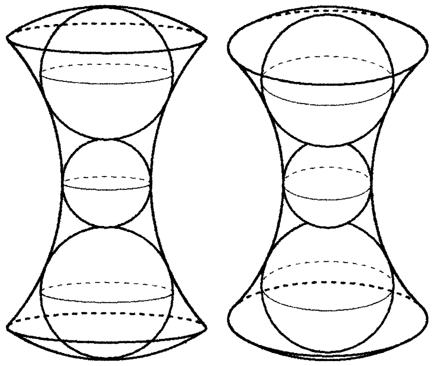
4.1 大西佐兵衛

【問題文】



図のように、孤環減球に中球 2 個と小球 1 個がある。中球、小球の直径の長さがそれぞれ 3 寸、2 寸のとき、孤環減球から中球 2 個と小球 1 個を除いた体積（外積）を求めよ。

【現代解】

この問題の本質は孤環減球の体積を求めることである。孤環減球は図 1(1) のように、x 軸を回転軸にして 2 円 O, P と x 軸とで囲まれた領域（灰色部分）を回転させてできる回転体である。

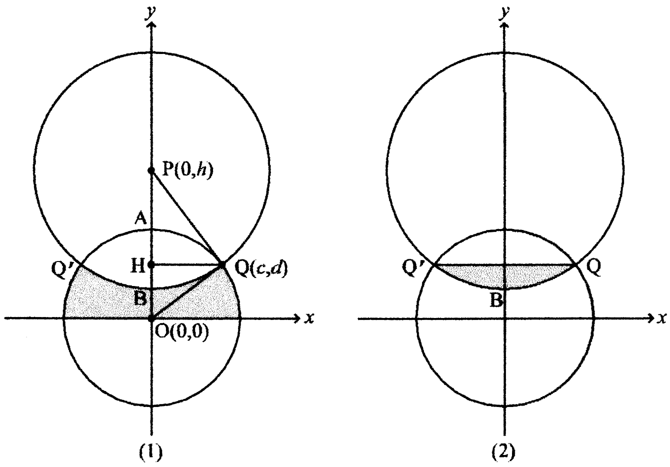


図 1: 回転体としての孤環減球

2 円 O, P の方程式をそれぞれ

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{1}$$

$$x^2 + (y-h)^2 = R^2 \tag{2}$$

とおく。ただし、$0 < R < h < R + r$ である。次に 2 円の交点 $Q(c, d)$ の座標を求めよう。連立方程式 (1), (2) を解けばよいのだが、実際計算してみると思いのほか式の整理に手間取る。次のように幾何学的に処理した方がエレガントである。$\Delta POQ = \dfrac{ch}{2}$ とヘロンの公式で求めた ΔPOQ の面積を比較すると、

$$c = 2\frac{\sqrt{s(s-h)(s-r)(s-R)}}{h} \qquad (s = \frac{h+r+R}{2}) \tag{3}$$

である。また、$\triangle$POQ に余弦定理を用いると

$$R^2 = h^2 + r^2 - 2hr\cos\angle\mathrm{POQ} = h^2 + r^2 - 2hd$$

となるので、

$$d = \frac{h^2 + r^2 - R^2}{2h} \tag{4}$$

である。

孤環減球の体積を V_1 とすると、それは半径 r の球 O の体積 $\frac{4}{3}\pi r^3$ から弧 Q′AQ と弧 Q′BQ で囲まれる部分を x 軸の周りに回転させてできる回転体の体積 V_2 を引いたものである。

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 - V_2 \tag{5}$$

弧 Q′AQ と弧 Q′BQ の式はそれぞれ

$$y_1 = \sqrt{r^2 - x^2}, \qquad y_2 = h - \sqrt{R^2 - x^2} \qquad (-c \leqq x \leqq c)$$

なので、

$$V_2 = \pi\int_{-c}^{c}(y_1^2 - y_2^2)\,dx = \pi\int_{-c}^{c}(r^2 - R^2 - h^2 + 2h\sqrt{R^2 - x^2})\,dx$$

この式に、(4) より得られる $r^2 - R^2 = 2dh - h^2$ を代入すると

$$V_2 = 2\pi h\int_{-c}^{c}\{d - (h - \sqrt{R^2 - x^2})\}\,dx = 2\pi h\int_{-c}^{c}(d - y_2)\,dx$$

となる。この式の最後の定積分は図 1 (2) の灰色の弓形の面積 S に等しいので、

$$V_2 = 2\pi hS \tag{6}$$

となり、従って

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 - 2\pi hS \tag{7}$$

である。これが孤環減球の体積公式である。算額では面積 S を弧積と呼んでいる。

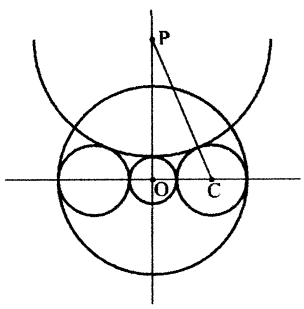


図 2: 中球と小球が内接

算額の問題に戻り、中球と小球が孤環減球に内接している条件を加えて、孤環減球の体積の式を書き換えてみることにしよう。図 2 は 3 球が内接するときの切り口である。中球の半径を a、小球の半径を b、中球の中心を C として、$\triangle$POC に三平方の定理を用いると、$(b+R)^2 + (a+b)^2 = (a+R)^2$ なのでこれを解いて、

$$R = \frac{(a+b)b}{a-b} \tag{8}$$

となる。また h, r については、

$$h = b + R = \frac{2ab}{a-b}, \qquad r = 2a + b \tag{9}$$

である。

そこで、孤環滅球の体積 V_1 は式 (7) に (8), (9) を代入することで、

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi(2a+b)^3 - \frac{4\pi ab}{a-b}S \tag{10}$$

となる。

この V_1 から中球 2 個と小球 1 個を除いた外積 V は

$$V = V_1 - 2\cdot\frac{4}{3}\pi a^3 - \frac{4}{3}\pi b^3$$

$$V = 8\pi a(a+b)^2 - \frac{4\pi ab}{a-b}S \tag{11}$$

となり、これが S を使って表した算額の問題の解で、実に簡潔な式である。

最後に弧積 S の計算であるが、これが厄介で、

$$S = 2\int_{h-d}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

に補助定理 1 を用いて計算することで

$$\begin{aligned} S &= R^2\cos^{-1}\frac{h-d}{R} - (h-d)\sqrt{R^2-(h-d)^2} \\ &= \frac{(a+b)^2b^2}{(a-b)^2}\cos^{-1}\frac{a(2b-a)}{b^2} - \frac{a(a+b)^2(2b-a)\sqrt{b^2+2ab-a^2}}{(a-b)b^2} \end{aligned}$$

となる。これを (11) に代入しても

$$V = 4\pi a(a+b)^2\left\{2 + \frac{a(2b-a)\sqrt{b^2+2ab-a^2}}{(a-b)^2b} - \frac{b^3}{(a-b)^3}\cos^{-1}\frac{a(2b-a)}{b^2}\right\} \tag{12}$$

のような、長くてよく分からない式となってしまう。

最後に具体的な数値として、$a = \frac{3}{2}$, $b = 1$ を代入すると、

$$V = 75\pi + \frac{225\sqrt{7}\pi}{4} - 300\pi\cos^{-1}\frac{3}{4}$$

であり、その近似値は $V = 22.0013176\cdots$ である。

【算額の解】

算額の答曰には「外積二十二歩有奇」と書かれている。これは、外積は 22 歩に端数が少しつくことを意味している。また術曰には式 (11) と同値な式

$$V = 8\pi a(a+b)^2\left\{1 - \frac{bS}{2(a-b)(a+b)^2}\right\}$$

が書かれていて、現代解で求めたものと一致する。

現代解では弧積 S の計算に逆三角関数を用いたが、和算では弧積の計算には次の級数展開が用いられている。

$$S = 2\int_a^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx = \frac{4p}{3}\left(1 + \frac{1}{5}t + \frac{1}{5}\cdot\frac{6}{7}t^2 + \frac{1}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}t^3 + \frac{1}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{11}t^4 + \cdots\right)$$

ここで、$p = (r-a)\sqrt{r^2-a^2}$, $t = \dfrac{r-a}{2r}$ である。