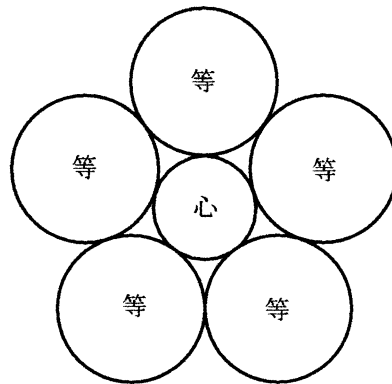


4.32 岩田清謹

【問題文】



大洞家の家紋がある。図のように5つの等円があり、その中に心円がある。このとき、心円の直径と等円の直径の比はいくらか。

【現代解】

図 58 のように、心円の中心を O 、5 個の等円の中心を A, B, C, D, E とし、 CD の中点を M とする。また、等円の半径を a 、心円の半径を r とする。

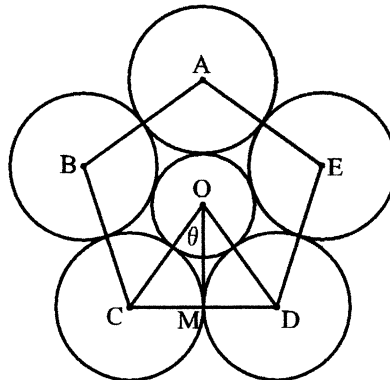


図 58: 大洞家の家紋

五角形 $ABCDE$ は正五角形なので $\angle COM = \theta = 36^\circ$ であり、 $OC = r + a$ 、 $CM = a$ なので、

$$\frac{a}{r+a} = \sin \theta$$

となり、これより r と a の比は、

$$\frac{r}{a} = -1 + \frac{1}{\sin \theta} \tag{1}$$

である。補助定理 11 により、

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$$

なので、

$$\begin{aligned}\frac{r}{a} &= -1 + \sqrt{\frac{8}{5 - \sqrt{5}}} = -1 + \sqrt{\frac{8(5 + \sqrt{5})}{(5 - \sqrt{5})(5 + \sqrt{5})}} \\ &= -1 + \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{5}} = -1 + \sqrt{2 + \frac{2}{\sqrt{5}}}\end{aligned}$$

となり、従って

$$\frac{r}{a} = -1 + \sqrt{2 + \frac{2}{\sqrt{5}}} \quad (2)$$

を得る。数値で表せばおよそ

$$\frac{r}{a} = 0.7013016167\dots$$

となる。

【算額の解】

算額の術には、

$$\begin{aligned}u &= (\sqrt{5} + 1)^2 \\ v &= 2\sqrt{u - 1}\end{aligned}$$

と置いて

$$\frac{r}{a} = \frac{u}{v} - 1$$

とすると書いてある。実際計算してみると、

$$\begin{aligned}\frac{r}{a} &= -1 + \frac{6 + 2\sqrt{5}}{2\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}} = -1 + \sqrt{\frac{(6 + 2\sqrt{5})^2}{4(5 + 2\sqrt{5})}} \\ &= -1 + \sqrt{\frac{14 + 6\sqrt{5}}{5 + 2\sqrt{5}}} = -1 + \sqrt{\frac{(14 + 6\sqrt{5})(5 - 2\sqrt{5})}{(5 + 2\sqrt{5})(5 - 2\sqrt{5})}} \\ &= -1 + \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{5}} = -1 + \sqrt{2 + \frac{2}{\sqrt{5}}}\end{aligned}$$

となり、現代解と一致する。

また、数値解も「0.7013016 有奇」で現代解と一致している。