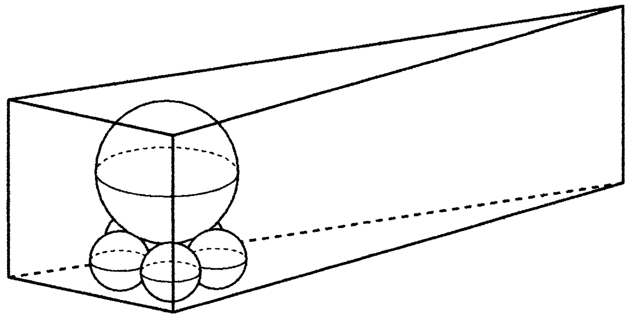
4.11 栗林佐太郎

【問題文】



図のように、三角柱の底面に接し互いに外接する5個の等球と、それらの上に乗り上面に接する1個の異球がある。ただし、等球1個と異球は三角形の最大辺を含む側面には接していない。底面の三角形の最大辺ではない2辺の長さが20寸、6寸6分のとき、三角柱の高さを求めよ。

【現代解】

図18は三角柱を真上から見たときの図である。他にも可能性がありそうだが、問題文に合う三角柱はこれ以外にはない。三角柱の底面 $\triangle$ABC において、$\angle$ABC は正五角形の内角に等しいので 108° である。異球の中心をO、半径を R、等球の中心を $O_1, O_2, \ldots, O_5$、半径を r とする。また、3辺の長さを $BC = a = 20$, $CA = b$, $AB = c = 6.6$ とする。ここで、2辺 a, c の比を

$$w = \frac{c}{a}$$

とおくことにする。この w は $\triangle$ABC の形（相似の範囲内で）を決定するパラメータである。また、$\theta = 36^\circ$ とおき、計算には補助定理11の三角比を用いる。

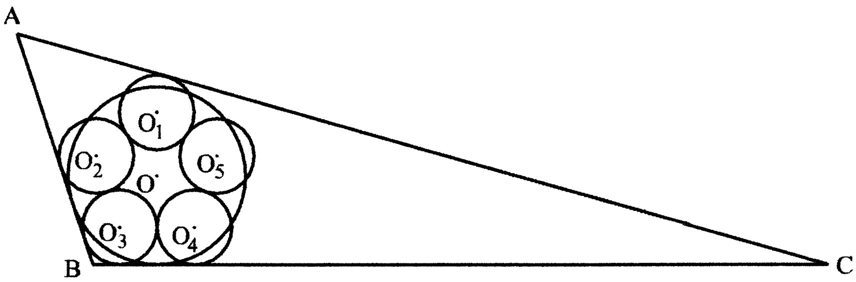


図18: 上から見た図

図19のように、正5角形 $O_1O_2O_3O_4O_5$ に外接し、$\triangle$ABC と相似の位置にある三角形を $\triangle A_1O_3C_1$ とする。同様に、半径 r の円 O′ に外接し、$\triangle$ABC と相似な三角形を $\triangle A_2B_2C_2$ とする。また、3点 A_1, O_3, C_1, から $\triangle$ABC の辺に向けて引いている線分はすべて垂線とする。

このとき、図19での BO_3 を対角線に持つ四角形と B_2O' を対角線に持つ四角形は合同で、同様に C_1C を対角線に持つ四角形と $O'C_2$ を対角線に持つ四角形は合同であることから、

$$BC = O_3C_1 + B_2C_2 \tag{1}$$

が成り立つ。

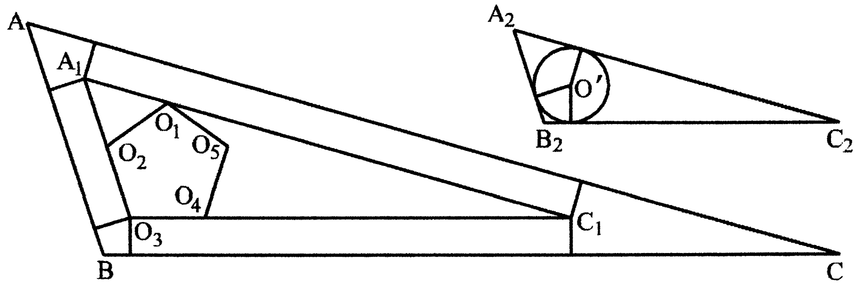


図 19: 相似な三角形

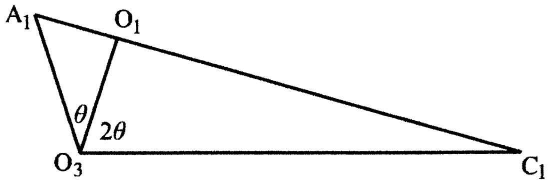


図 20: $\triangle A_1O_3C_1$

次に図 20 を用いて、$\triangle A_1O_3C_1$ について考える。線分 O_3C_1, C_1A_1, A_1O_3 の長さをそれぞれ a_1, b_1, c_1 とする。補助定理 12 により、

$$(a_1 \sin 2\theta + c_1 \sin\theta) O_1O_3 = a_1 c_1 \sin 3\theta \tag{2}$$

である。これに、$O_1O_2 = 2r$ で $O_1O_3 = 4r\cos\theta$ 及び $\sin 3\theta = \sin 2\theta$ であることを用いて整理すると、

$$4r(2a_1 \sin\theta\cos\theta + c_1 \sin\theta)\cos\theta = 2a_1c_1 \sin\theta\cos\theta$$

$$2r(2a_1\cos\theta + c_1) = a_1c_1$$

ここで、$c_1 = wa_1$ なので、

$$a_1 = \left(2 + \frac{4\cos\theta}{w}\right) r \tag{3}$$

となる。

次に、$\triangle A_2B_2C_2$ について考える。3 辺の長さを a_2, b_2, c_2 とするとき、余弦定理より、

$$b_2^2 = a_2^2 + c_2^2 - 2a_2c_2\cos 3\theta = a_2^2 + c_2^2 + 2a_2c_2\cos 2\theta = \left(w^2 + 2w\cos 2\theta + 1\right) a_2^2$$

となる。そこで、

$$p = \sqrt{w^2 + 2w\cos 2\theta + 1} \tag{4}$$

とおくことで、$b_2 = pa_2$ となる。また、$\triangle A_2B_2C_2$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}a_2c_2\sin 3\theta = \frac{1}{2}a_2c_2\sin 2\theta$$

なので、補助定理 13 を使い内接円の半径 r との関係式を求めると、

$$\frac{1}{2}(a_2 + b_2 + c_2)r = \frac{1}{2}a_2c_2\sin 2\theta$$

$$(1 + p + w)r = a_2 w \sin 2\theta$$

$$a_2 = \frac{1 + p + w}{w\sin 2\theta} r \tag{5}$$

となる。式 (1)、(3)、(5) をまとめると、

$$a = a_1 + a_2 = \left(2 + \frac{4\cos\theta}{w} + \frac{1+p+w}{w\sin 2\theta}\right)r$$

$$r = \frac{1}{2 + \frac{4\cos\theta}{w} + \frac{1+p+w}{w\sin 2\theta}}\,a \tag{6}$$

である。

この式に $a = 20,\ w = \frac{33}{100}$ を代入して近似計算すると

$$r \fallingdotseq 1.0154978504 \tag{7}$$

となる。

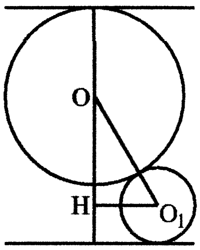


図 21: 切口

最後に三角柱の高さを計算しよう。図 21 は 2 点 O、O_1 を含み底面に垂直な平面で切った切口である。異球の半径 R は図 18 より、

$$R = r + r\cot\theta = r(1 + \cot\theta) \tag{8}$$

である。また、O_1H の長さは、図 18 の O_1O に相当するので、

$$O_1H = \frac{r}{\sin\theta}$$

となり、OH の長さは

$$OH = \sqrt{(R+r)^2 - O_1H^2} = r\sqrt{(2+\cot\theta)^2 - \frac{1}{\sin^2\theta}} = r\sqrt{3 + 4\cot\theta} \tag{9}$$

これらを用いると三角柱の高さ h は、$h = r + OH + R$ を計算して、

$$h = \left(2 + \cot\theta + \sqrt{3 + 4\cot\theta}\right)r \tag{10}$$

である。この式と (6) を組み合わせた

$$h = \frac{2 + \cot\theta + \sqrt{3 + 4\cot\theta}}{2 + \frac{4\cos\theta}{w} + \frac{1+p+w}{w\sin 2\theta}}\,a \tag{11}$$

が最終的な解である。

また、近似値を計算すると

$$h \fallingdotseq 6.2928057034r \fallingdotseq 6.3903306651 \tag{12}$$

となる。

【算額の解】

術日は長文であるので、数式としてまとめてみる。まず、中斜 = BC = a、小斜 = AB = c とおく。説明のため、$\theta = 36°$ とする。

$$角 = a + c, \quad 元 = a - c$$

$$氏^{1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad (= 2\cos\theta)$$

$$房 = \sqrt{氏 + \frac{3}{4}}$$

$$心 = \frac{氏 + \frac{1}{2}}{房} \quad (= \cot\theta))$$

$$尾 = \frac{心}{心 + 1} \quad (= \frac{1}{1 + \tan\theta})$$

$$箕 = \sqrt{3 - 氏} \quad (= 2\sin\theta)$$

$$斗 = 箕 \cdot 元 \quad (= 2(a - c)\sin\theta)$$

$$牛 = 氏 \cdot 角 \quad (= 2(a + c)\cos\theta)$$

$$女 = \frac{斗 + 牛 - \sqrt{牛^2 + 斗^2}}{2}$$

$$虚 = \frac{(\frac{女}{牛-女} + \frac{1}{2}) \cdot 元 \cdot 尾}{氏}$$

$$危 = \frac{角 \cdot 房}{箕} + 虚$$

$$高 = \frac{(\sqrt{心 + \frac{3}{4}} + 1 + \frac{心}{2})\, 尾 \cdot a \cdot c}{危}$$

術日には「高」が答えであるとしめくくられている。これらの式の中で、「氏」から「箕」は角度が関係する値である。「女」の式中にある

$$\sqrt{牛^2 + 斗^2} = 2\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos 3\theta}$$

は辺 AC の長さであり、「高」の中の

$$2(\sqrt{心 + \frac{3}{4}} + 1 + \frac{心}{2}) = 2 + \cot\theta + \sqrt{3 + 4\cot\theta}$$

は (10) で用いた式である。しかしながら、「牛」、「虚」、「危」についてはその式の意味するところがよく分からない。計算方法の違いなのか、計算間違いなのか不明である。術日の式に具体的数値を入れて近似計算してみると「高 ≒ 6.31897」となる。この値は現代解で得られた (12) よりも少し小さい値である。

[1] この漢字は本来は「底」から「广」を取り除いた字であるが、ワープロの都合で「氏」で代用する。