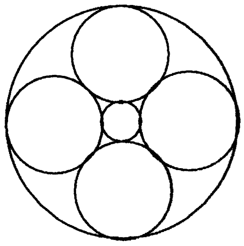
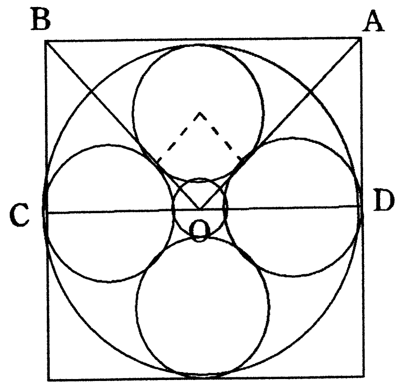
『初級問題』

1　図のように，大円内に中円４個，小円１個がある。大円の直径の長さを a とするとき，小円の直径の長さを求めよ。　（伊佐爾波神社･中村正教）





解）大円，中円，小円の直径をそれぞれ a, b, x とし，右図のように記号をつける。

△OABは ∠AOB＝90° の直角二等辺三角形となり，中円はその内接円となるから

$b=\mathrm{OA}+\mathrm{OB}-\mathrm{AB}$

$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$ より

$b=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}a-a=(\sqrt{2}-1)a$

また，$\mathrm{AB}=\mathrm{CD}=2b+x=a$ より

$x=a-2b=a-2(\sqrt{2}-1)a$

$=(3-2\sqrt{2})a$　（$\fallingdotseq 0.1715729\,a$）

〈術文（術曰）〉

「大円径折半自乗和平方開引半径貳倍中円径」……$2\left(\sqrt{2\left(\frac{大}{2}\right)^2}-\frac{大}{2}\right)=中$

「大円径引中円径貳個餘小円径」……大-2中＝小

上記を 大＝a, 中＝b, 小＝x とすると

$b=\left(\sqrt{2\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}\right)\times 2=(\sqrt{2}-1)a$

小円径＝$x=a-2b=a-2(\sqrt{2}-1)a=(3-2\sqrt{2})a$

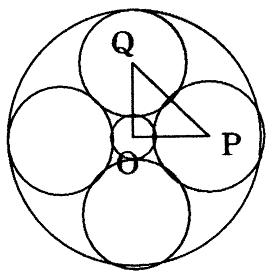
〈解説〉

簡単には右図において

△OPQは ∠POQ＝90° の直角二等辺三角形となる。

$b=\sqrt{2}\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)$ より

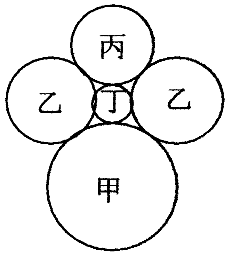
$b=(\sqrt{2}-1)a$



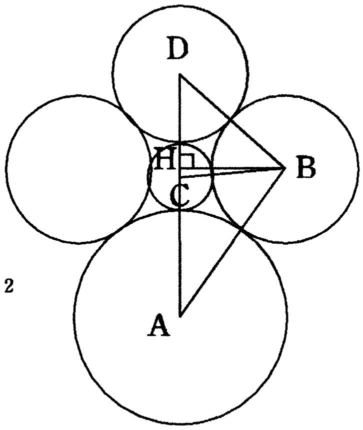
『中級問題』

2　図のように，外接する５個の円がある。甲円の直径の長さが27cm，乙円の直径の長さが21cm，丁円の直径の長さが９cmのとき，丙円の直径の長さを求めよ。

(伊佐爾波神社･桐野富五郎)



解）右図のように記号をつけ，甲，乙，丁円の直径をそれぞれ a, b, c ，丙円の直径を x とする。



次にBから直線ADに下ろした垂線の足をHとし，CH＝y とする。

△ABH，△BCH，△BDH において，三平方の定理より

$AH^2+BH^2=AB^2$，$CH^2+BH^2=BC^2$，$DH^2+BH^2=BD^2$

$\therefore\quad AB^2-AH^2=BC^2-CH^2=BD^2-DH^2\ \ (=BH^2)$

両辺を４倍すると

$$(a+b)^2-(a+c+y)^2=(b+c)^2-y^2=(x+b)^2-(x+c-y)^2$$

となる。

左の等式より　$(a+c)y-\{(a-c)b-(a+c)c\}=0$

右の等式より　$(x+c)y+\{(x-c)b-(x+c)c\}=0$

ここで　$a+c=\mathrm{A}$，$x+c=\mathrm{X}$ とし整理すると

$\mathrm{A}y-\{(b-c)\mathrm{A}-2bc\}=0\ \cdots\cdots$ ①

$\mathrm{X}y+\{(b-c)\mathrm{X}-2bc\}=0\ \cdots\cdots$ ②

①×X－②×A より

$-\mathrm{X}\{(b-c)\mathrm{A}-2bc\}-\mathrm{A}\{(b-c)\mathrm{X}-2bc\}=0$

$\{(b-c)\mathrm{A}-bc\}\mathrm{X}=bc\,\mathrm{A}$

$$\mathrm{X}=\frac{bc\,\mathrm{A}}{(b-c)\mathrm{A}-bc}=x+c$$

今，$(a+c)c=\mathrm{AC}=\mathrm{T}$ (＝極) とおくと

$$x=\frac{\mathrm{T}\cdot b}{ab-\mathrm{T}}-c=\frac{c^2(a+b+c)}{ab-ac-c^2}$$

この式に　$a=27$，$b=21$，$c=9$ を代入して

丙円径＝$x=19$ (cm)

〈術文（術曰）〉

「置甲円径加丁円径乗丁円径名極」‥‥‥(甲＋丁)丁＝極

「置甲円径乗乙円径内減極」‥‥‥甲×乙－極

「餘以除極乗乙円径内減丁円径餘得丙円径」‥‥‥$\dfrac{\text{極}\times\text{乙}}{\text{甲}\times\text{乙}-\text{極}}-\text{丁}=\text{丙}$

ここで　甲＝a，乙＝b，丁＝c，丙＝x，極＝T とおくと

$$\text{丙円径}=\frac{\mathrm{T}\cdot b}{ab-\mathrm{T}}-c=\frac{c^2(a+b+c)}{ab-ac-c^2}$$

〈解説〉

この問題は５円が左右対称に互いに外接する美しい図形です。このため和算を志す多くの人々に親しまれた問題と思われます。和算が一番大衆化した時に出版された和算の公式集に掲載されています。

1．『最上流算法天生指南』（文化７年(1810)，会田安明著）

公式25番として

甲，乙，丙，丁の５円の間には次の関係式が成り立つ。

$$(\text{甲}+\text{乙}+\text{丙}+\text{丁})\text{丁}^2-\text{甲丙}(\text{乙}-\text{丁})=0$$

2．『算法助術』（天保12年(1841)，山本安之進賀前編）

公式23番として

$$(\text{甲}+\text{丁})(\text{丙}+\text{丁})\text{丁}-(\text{甲丙}-\text{丁}^2)\text{乙}=0$$

上記のいずれの式も，甲＝a，乙＝b，丁＝c，丙＝x として整理すると

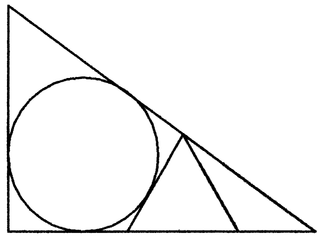
$$\text{丙円径}=x=\frac{c^2(a+b+c)}{ab-ac-c^2}$$

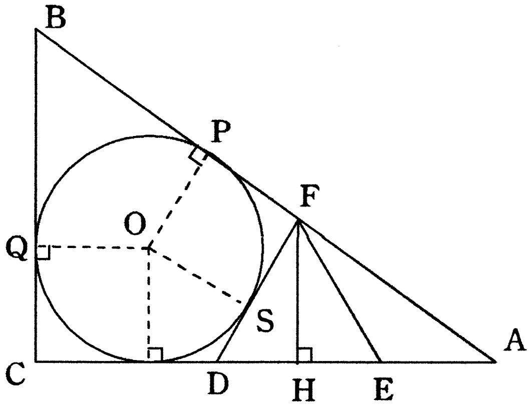
となります。

『中級問題』

3　図のように，直角三角形内に円と正三角形を入れる。直角をはさむ２辺の長さが108.6cm，144.8cm のとき、正三角形の一辺の長さを求めよ。

（吉藤三島神社·松岡多三郎）





解）右図のように記号をつけ，内接円Oの半径を r とする。

$BC=a=108.6=3r \qquad 2r=a+b+c=72.4$

$CA=b=144.8=4r$

$AB=c=181=5r$

（ただし，$r=36.2$）

今，正三角形DEFの一辺の長さを x とすると

BP=BQ, CQ=CR より

$AP+AR=AB+AC-(BP+CR)=AB+AC-BC$

$\qquad =b+c-a \quad \cdots\cdots$ ①

一方，FD=FS, DR=DS より　$DS+FS=DR+FD=x$

$DH=\dfrac{1}{2}x,\ FH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

$\triangle ABC \backsim \triangle AFD$ より　$FH:HA:AF=a:b:c$

よって　$AH=\dfrac{b}{a}FH=\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}x,\quad AF=\dfrac{c}{a}FH=\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

ここで　$AD+AR=(FD+DR)+DH+(AF+AH)$

$$=x+\frac{1}{2}x+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{b}{a}x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{c}{a}x\right)$$

$$=\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{b+c}{a}x \quad \cdots\cdots ②$$

①，②より

$$\left\{\frac{\sqrt{3}(b+c)}{a}+3\right\}x=2(b+c-a)$$

$$\therefore \quad x=\frac{2(b+c-a)}{\sqrt{3}\cdot\dfrac{b+c}{a}+3}=\frac{434.40}{8.196}=53.000478 \quad (cm)$$

$$=\frac{12r}{3\sqrt{3}+3}=\frac{4r}{\sqrt{3}+1}=2(\sqrt{3}-1)r=53.0004777 \quad (cm)$$

〈術文（術曰）〉

「置鈎自之加股巾平方開之加股名天」……$\sqrt{鈎^2+股^2}+股=天$

「内減餘倍而名地」……$(天-鈎)\times 2=地$

「置三個平方開之乗天以鈎除之加三箇以除地得三角面」……$\dfrac{地}{\sqrt{3}\times\dfrac{天}{鈎}+3}=三角面$

ここで　鈎$=a$，股$=b$，玄$=c=\sqrt{a^2+b^2}$，正三角形の一辺を x とすると

天$=b+c$，　地$=2(b+c-a)$

よって，正三角形の一辺は　$x=\dfrac{2(b+c-a)}{\sqrt{3}\cdot\dfrac{b+c}{a}+3}$

〈解説〉

この問題の“答曰”には53cm有奇とあります。有奇はそれ以降に数字があることを示す用語です。普通は上記の解 53.00047… より，53.000有奇と書かれます。

和算では，答えの数値が整数になる問題が美しい。特に算額においては顕著です。そうでない時はそれに近い数が尊ばれました。

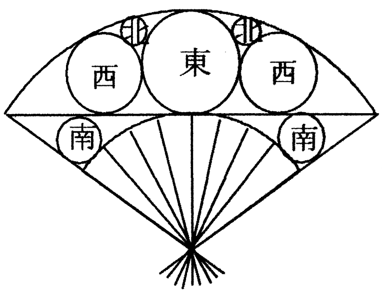
奉納者もはじめ２辺の長さ $a=鈎=3$，$b=股=4$ として解き，正三角形の一辺 $x=1.464106$ と計算したものと思われます。

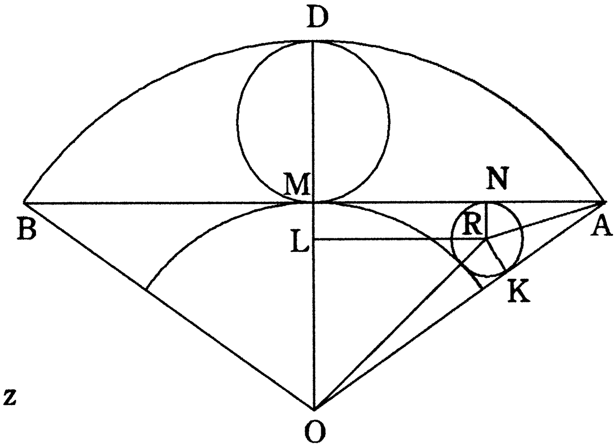
和算では上記小数を分数に直す“零約術”があります。これらを使い，答えが整数に近い 53.000… を見つけ，それになる $a=108.8$，$b=144.8$ とする問題としたものと思われます。

『上級問題』

4　図のように，中心角120°の扇形内に東円１個，西円，南円，北円がそれぞれ２個ある。南円の直径の長さが与えられたとき、北円の直径の長さを求めよ。

（伊佐爾波神社・高阪金次郎）





解）右図のように記号をつける。

今、扇形の半径を４とおくと

OA＝OB＝OD＝4，OM＝2,

東円の直径 DM＝2 となる。

(1)　南円の半径 $z=\dfrac{a}{2}$ を求める。

△OKRにおいて

$OK^2=OR^2-RK^2=(2+z)^2-z^2=4+4z$

$\therefore\quad OK=\sqrt{4+4z}=2\sqrt{1+z}$

$AK=OA-OK=4-2\sqrt{1+z}$ ……①

また，$MN^2=LR^2=OR^2-OL^2=(2+z)^2-(2-z)^2=8z$

$\therefore\quad MN=2\sqrt{2z}$

$AN=AM-MN=2\sqrt{3}-2\sqrt{2z}$ ……②

AK＝AN より

$4-2\sqrt{1+z}=2\sqrt{3}-2\sqrt{2z}$

$\sqrt{1+z}=(2-\sqrt{3})+\sqrt{2z}$

両辺を平方し，整理すると

$(2-z)-4(2-\sqrt{3})=2(2-\sqrt{3})\sqrt{2z}$

$2-\sqrt{3}=A$ とおくと

$(2-z)-4A=2A\sqrt{2z}$

両辺を平方すると

$(2-z)^2-8A(2-z)+16A^2=8A^2z$

$(2-z)^2-8A(2-z)+8A^2(2-z)=0$

$z\fallingdotseq 2$ より

$2-z-8A+8A^2=0$

$\dfrac{a}{2}=z=2-8A+8A^2=2(1-4A+4A^2)=2(1-2A)^2=6A^2=6(7-4\sqrt{3})$

(2) 西円の半径 y を求める。

右図のように記号をつける。

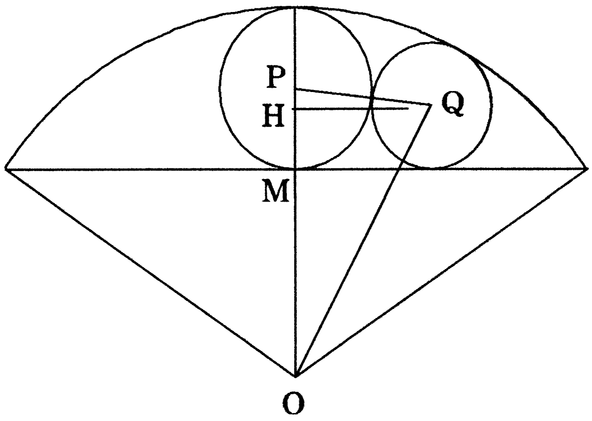
△POQにおいて

$$\mathrm{OQ}^2-\mathrm{OH}^2=\mathrm{PQ}^2-\mathrm{PH}^2 \quad (=\mathrm{HQ}^2)$$

$$(4-y)^2-(2+y)^2=(1+y)^2-(1-y)^2$$

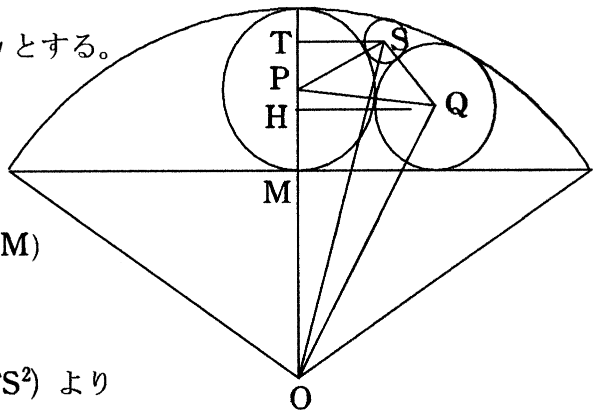
$$12-12y=4y$$

$$\therefore \quad y=\frac{3}{4}$$



(3) 北円の半径 x を求める。

右図のように記号をつけ，$\mathrm{PT}=p$, $\mathrm{PS}=q$ とする。



○東円と北円において

$\mathrm{PS}^2=p^2+q^2$，$\mathrm{PS}=1+x$ より

$$(1+x)^2=p^2+q^2 \quad \cdots\cdots ①$$

また，$\mathrm{TH}=\mathrm{TP}+\mathrm{PH}=\mathrm{TP}+(\mathrm{PM}-\mathrm{HM})$

$$=p+\left(1-\frac{3}{4}\right)=p+\frac{1}{4}$$

さらに，$\mathrm{OS}^2-\mathrm{OT}^2=\mathrm{PS}^2-\mathrm{PT}^2 \quad (=\mathrm{TS}^2)$ より

$$(4-x)^2-(3+p)^2=(1+x)^2-p^2$$

$$15-10x=9+6p$$

$$\therefore \quad p=1-\frac{5}{3}x \quad \cdots\cdots ②$$

○西円と北円において

$$\mathrm{SQ}=\frac{3}{4}+x, \quad \mathrm{HQ}^2=\mathrm{OQ}^2-\mathrm{OH}^2=(4-y)^2-(2+y)^2=3$$

$$\mathrm{SQ}^2=\mathrm{TH}^2+(\mathrm{HQ}-\mathrm{TS})^2$$

$$=\left(\frac{1}{4}+p\right)^2+(\sqrt{3}-q)^2$$

$$=\frac{1}{16}+\frac{1}{2}p+3-2\sqrt{3}q+p^2+q^2$$

よって $\left(\frac{3}{4}+x\right)^2=\frac{49}{16}+\frac{1}{2}p-2\sqrt{3}q+(1+x)^2$ （∵①より） $\cdots\cdots ③$

①，②より

$$q^2=(1+x)^2-\left(1-\frac{5}{3}x\right)^2=\frac{16}{3}x-\frac{16}{9}x^2$$

$$\therefore \quad 9q^2=16(3x-x^2) \quad \cdots\cdots ④$$

②，③，④より，p, q を消去する。

③より　$2\sqrt{3}\,q=\dfrac{49}{16}-\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{5}{3}x\right)+(1+x)^2-\left(\dfrac{3}{4}+x\right)^2$

$$=\frac{1}{16}(49-9+8+16)-\frac{1}{6}(5-12+9)x=\frac{64}{16}-\frac{2}{6}x$$

$$6\sqrt{3}\,q=12-x$$

平方して整理すると

$$12\times 9q^2=(12-x)^2$$

④より　$12\times 16(3x-x^2)=(12-x)^2$

$$193x^2-600x+144=0$$

$$x=\frac{300\pm\sqrt{144^2\times 3}}{193}$$

$x<1$ より

$$x=\frac{300-144\sqrt{3}}{193}$$

ここで　$\dfrac{2x}{2z}=\dfrac{2x}{a}=\dfrac{\dfrac{1}{193}(300-144\sqrt{3})}{6(7-4\sqrt{3})}=\dfrac{50-24\sqrt{3}}{193(7-4\sqrt{3})}$

$$=\frac{62+32\sqrt{3}}{193}=\frac{62+\sqrt{3072}}{193}$$

よって　北円の直径　$2x=\dfrac{62+32\sqrt{3}}{193}a$

〈術文（術曰）〉

「置三千零七十二個平方開之加六十二個」……$\sqrt{3072}+62=62+32\sqrt{3}$

「以一百九十三個除之乗南円径得北円径」……$\dfrac{62+32\sqrt{3}}{193}\times$南円径＝北円径

〈解説〉

北円の直径＝$\dfrac{62+32\sqrt{3}}{193}a \fallingdotseq 0.6084229a \fallingdotseq 0.6a=\dfrac{3}{5}a$ となります。

$\dfrac{62+32\sqrt{3}}{193}$ が 0.6084･･･でなく，0.6000･･･くらいの数値になれば，

『南円の直径が５のとき，北円の直径を求めよ。』という問題になっていたかも知れません。

明治時代の算額，近似値よりは出来るだけ正確な値を選んだものと思われます。