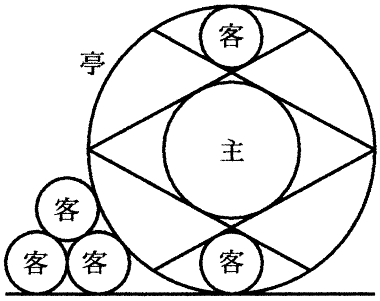
4.12　河原保三

【問題文】



　図のように、直線上に亭円と客円 3 個があり、亭円内に長さが等しい 4 本の線分で作られた図形内に 1 個の主円と 2 個の客円がある。亭円の直径が 23 寸 7 分のとき、主円の直径の長さを求めよ。

【現代解】

　亭円の半径を R、客円の半径を r、主円の半径を x とする。

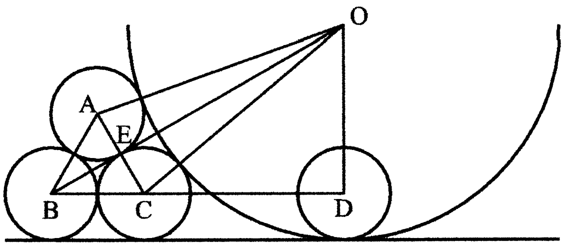


図 22: 亭円と客円の関係

　最初に R と r の関係を調べよう。図 22 のように、亭円の中心を O、客円 4 個の中心を A, B, C, D、2 線分 OB, AC の交点を E とする。直角三角形 $\triangle$OBD は $\angle$OBD = 30° なので、OB = 2OD = $2(R-r)$、OE = $2(R-r)-\sqrt{3}r$ である。直角三角形 $\triangle$OAE に三平方の定理を用いると

$$(R+r)^2 = r^2 + \left\{2(R-r) - \sqrt{3}r\right\}^2$$

となり、これを整理すると

$$(r-R)\left((4\sqrt{3}+7)r - 3R\right) = 0$$

となる。ここで $r<R$ により

$$r = \frac{3}{4\sqrt{3}+7}R = 3(7-4\sqrt{3})R \tag{1}$$

である。ここで、$t = \dfrac{r}{R} = 3(7-4\sqrt{3})$ とおくと、t は 2 次方程式

$$t^2 - 42t + 9 = 0 \tag{2}$$

の解である。

　次に主円の半径 x について調べよう。図 23 のように、線分 FG と主円の接点を H、客円の中心 D を通り FG に平行な直線と OH の交点を I とする。このとき、$\triangle$OFH と $\triangle$ODI は相似なので、OF : FH = DO : OI より

$$\sqrt{R^2-x^2}(R-r) = R(x+r) \tag{3}$$

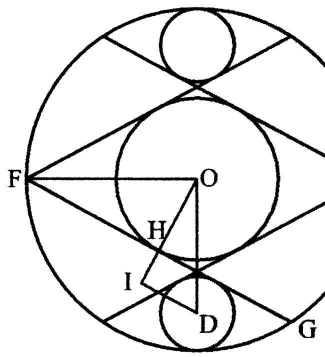


図 23: 主円との関係

となる。この両辺を 2 乗して整理すると

$$(r^2 - 2rR + 2R^2)x^2 + 2rR^2x + 2rR^3 - R^4 = 0$$

となり、$r = tR$ と $x = \dfrac{R}{y}$ を代入すると y についての 2 次方程式

$$(1 - 2t)y^2 - 2ty - 2 + 2t - t^2 = 0$$

が得られる。これを解くと

$$y = \frac{t \pm \sqrt{2}\sqrt{(1-t)^3}}{1-2t}$$

の 2 解となるが、$t \fallingdotseq 0.2153903092$ なので正の解 y は

$$y = \frac{t + \sqrt{2}\sqrt{(1-t)^3}}{1-2t} \tag{4}$$

である。

ここで、$(1-t)^3 = -(t+39)(t^2 - 42t + 9) + 32(11 - 51t)$ により、

$$y = \frac{t + 8\sqrt{11 - 51t}}{1-2t}$$

となるので、これに $t = 3(7 - 4\sqrt{3})$ を代入すると

$$\begin{aligned}
y &= \frac{3(7-4\sqrt{3}) + 16\sqrt{153\sqrt{3} - 265}}{24\sqrt{3} - 41} \\
&= \frac{3(7-4\sqrt{3}) + 16\sqrt{153\sqrt{3} - 265}}{24\sqrt{3} - 41} \cdot \frac{24\sqrt{3}+41}{24\sqrt{3}+41} \\
&= \frac{3(4\sqrt{3}-1) + 16(24\sqrt{3}+41)\sqrt{153\sqrt{3} - 265}}{47} \\
&= \frac{3(4\sqrt{3}-1) + 16\sqrt{1968\sqrt{3}+3409}\sqrt{153\sqrt{3} - 265}}{47} \\
&= \frac{3(4\sqrt{3}-1) + 16\sqrt{57\sqrt{3} - 73}}{47}
\end{aligned}$$

となり、従って

$$x = \frac{R}{y} = \frac{47}{3(4\sqrt{3}-1) + 16\sqrt{57\sqrt{3}-73}}R \tag{5}$$

が得られる。その近似値は

$$x \fallingdotseq 0.4750386878 \times R$$

であり、亭円の直径が $2R = 23.7$ のとき主円の直径は

$$2x \fallingdotseq 11.25841690 \tag{6}$$

である。

【算額の解】

算額の術日には、$w = \sqrt{1728} - 41 = 24\sqrt{3} - 41$ とおくとき

$$\text{主円直径} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{w} + 25\right)^2 - 704} + \frac{1}{w} - 1} \times \text{亭円直径}$$

書かれている。この式を整理すると (5) と一致する。従って算額の考え方はあっているし正確な式での計算を行っている。しかし、答日に書かれている数値は「一十寸有奇」で、(6) とは値が異なっている。数値を代入する最終段階で何らかの計算間違いをしてしまったようだ。主円の直径の計算ミスなのか、答えを「一十寸有奇」にしようとして亭円の直径の値「二十三寸七分」の見積もりを間違えた出題ミスなのか、いろいろ憶測は可能であるが確かめようがない。