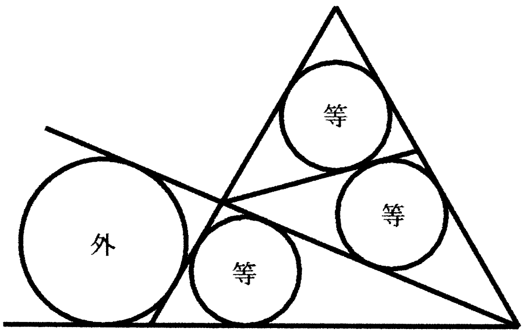
## 4.13　花山金次郎

【問題文】




図のように、直線上にある正三角形を 2 本の線分で分けた三角形に内接する等円が 3 個あり、直線と正三角形及び線分を延長した直線に接する外円 1 個がある。正三角形の 1 辺の長さが 20 寸のとき、外円の直径の長さを求めよ。

【現代解】

この問題の本質的な部分は正三角形内の 3 等円の半径を求めるところにある。そのためにどのように連立方程式を立てるかに工夫が必要である。

図 24 のように、正三角形を △ABC、2 本の線分を DC、DE、3 個の等円の中心を $O_1$、$O_2$、$O_3$ とし、その半径を $r$ とする。4 線分 AB、AD、AE、DC の長さをそれぞれ $a$、$b$、$c$、$d$ とする。

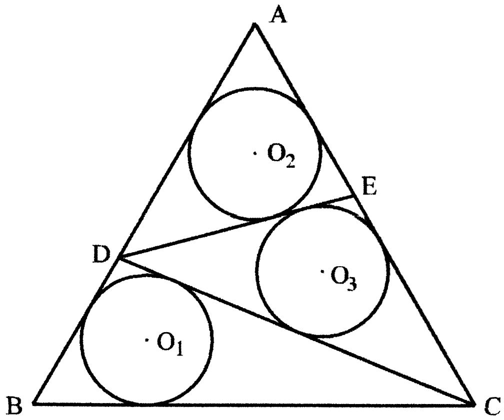



図 24: 正三角形内の 3 等円

最初に等円の半径 $r$ を求めるために必要な条件を探し出してみる。△ADC に余弦定理を用いると、

$$d^2 = a^2 - ab + b^2 \tag{1}$$

である。△DBC と内接円 $O_1$ に対して補助定理 14 を用いると、

$$d = 2a - b - 2\sqrt{3}r \tag{2}$$

である。△ADC の内接円の半径を $R$ とするとき、補助定理 14 により、

$$R = \frac{a + b - d}{2\sqrt{3}} = \frac{-a + 2b + 2\sqrt{3}r}{2\sqrt{3}} \tag{3}$$

である。$\triangle$ADC に対して、点 D から辺 AC に引いた垂線の長さ $h$ は

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}b \tag{4}$$

である。$\triangle$ADC に補助定理 8 を用いることにより、

$$2hr - 2r^2 - hR = 0 \tag{5}$$

である。この補助定理 8 は和算家が編み出した重要な公式で、この公式を用いることで後の計算が簡潔になる。

それでは、これら 5 つの関係式 (1)〜(5) を用いて、正三角形の 1 辺の長さ $a$ と 等円の半径 $r$ の関係式を導いてみる。最初に (1) に (2) を代入して $d$ を消去し整理すると、

$$3a^2 - 3ab - 8\sqrt{3}ar + 4\sqrt{3}br + 12r^2 = 0$$

となる。これを $b$ について解くと、

$$b = \frac{\sqrt{3}a^2 - 8ar + 4\sqrt{3}r^2}{\sqrt{3}a - 4r} = a - \frac{4r(\sqrt{3}r - a)}{4r - \sqrt{3}a} \tag{6}$$

となる。ここで、$\mathrm{BD} = a - b = \dfrac{4r(\sqrt{3}r - a)}{4r - \sqrt{3}a}$ であることに注意。続いて、(3) と (4) を (5) に代入し整理すると、

$$ab - 2b^2 + 2\sqrt{3}br - 8r^2 = 0$$

となり、これに (6) を代入して分母を払い整理すると、

$$3a^4 - 26\sqrt{3}a^3r + 228a^2r^2 - 264\sqrt{3}ar^3 + 320r^4 = 0 \tag{7}$$

を得る。これで $a$ と $r$ の関係式を求めることができた。

この 4 方程式を解けばよいのであるが、その前に $\sqrt{3}$ を消去し、もう少し簡単な式に変形する。式 (7) に $r = \frac{\sqrt{3}}{6}at$ を代入して整理すると、整係数の方程式

$$20t^4 - 99t^3 + 171t^2 - 117t + 27 = 0 \tag{8}$$

を得る。これは算額の「術日」に述べられている 4 次方程式と一致する。算額ではこの方程式から直接 $t$ を数値計算で求めているようである。しかし、$t = \dfrac{3}{4}$ がこの 4 次方程式は 1 つの解であることに気づけば、さらに次のように因数分解できる。

$$(4t - 3)\left(5t^3 - 21t^2 + 27t - 9\right) = 0$$

ここで、$t = \dfrac{3}{4}$ のとき、$r = \dfrac{\sqrt{3}}{8}a$、$b = \dfrac{3}{8}a < \dfrac{1}{2}a$ となり題意を満たさない。従って 3 次方程式

$$5t^3 - 21t^2 + 27t - 9 = 0 \tag{9}$$

を解かなければならないことになる。この 3 次方程式の正確な解の値（補助定理 15）は 3 次方程式のカルダノの公式で求めることができる。ここでは方程式 (9) の唯一の実解を $t = t_1$ とおく。この値を用いると、$r = \dfrac{\sqrt{3}}{6}at_1$、$\mathrm{BD} = \dfrac{4r(\sqrt{3}r - a)}{4r - \sqrt{3}a} = \dfrac{t_1(2 - t_1)}{3 - 2t_1}a$ となる。

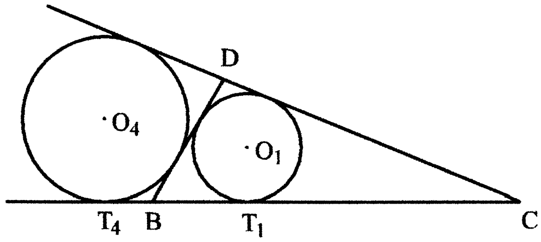



図 25: 外円を求める

最後に、外円の半径を計算しよう。外円の中心を $O_4$ とし、その半径を $r_4$ とする。また、直線BCと2円 $O_1$、$O_4$ の接点をそれぞれ $T_1$、$T_4$ とする。このとき、$\triangle O_4T_4C \backsim \triangle O_1T_1C$ であることにより、$O_4T_4 : O_1T_1 = T_4C : T_1C$ である。また、補助定理 16 より $T_4T_1 = BD$ である。従って、

$$\begin{aligned} r_4 &= r\frac{T_4C}{T_1C} = r\left(1 + \frac{T_4T_1}{T_1C}\right) \\ &= r\left(1 + \frac{BD}{BC - BT_1}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}at_1\left(1 + \frac{\frac{t_1(2-t_1)}{3-2t_1}a}{a - \frac{1}{2}at_1}\right) \end{aligned}$$

となり、これを整理すると、

$$r_4 = \frac{\sqrt{3}t_1}{2(3 - 2t_1)}a \tag{10}$$

である。

最後に、補助定理 15 により

$$t_1 = \frac{7 - c - 2c^2}{5} \qquad (c = \sqrt[3]{2}) \tag{11}$$

なので、これを (10) に代入すると

$$r_4 = \frac{\sqrt{3}a}{2}\cdot\frac{t_1}{3 - 2t_1} = \frac{\sqrt{3}a}{2}\cdot\frac{7 - c - 2c^2}{1 + 2c + 4c^2}$$

となり、分母分子に $2c - 1$ を掛けることで

$$r_4 = \frac{\sqrt{3}a}{2}\cdot\frac{7 - 15c + 4c^3}{1 - 8c^3} = \frac{\sqrt{3}a}{2}\cdot(c - 1)$$

をえる。従って

$$r_4 = \frac{\sqrt{3}(\sqrt[3]{2} - 1)}{2}a \tag{12}$$

と表すことができる。

【算額の解】

算額の術曰には、4 次方程式 (8) の実解を $t_1$ とするとき、

$$\text{外円直径} = \frac{t_1}{1.5 - t_1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

とある。これは式 (10) の両辺を 2 倍したものに等しい。

正三角形の一辺の長さ $a = 20$ と 3 次方程式 (9) の解の近似値 $t_1 \fallingdotseq 0.513055$ を代入すると、$r_4 \fallingdotseq 4.05196$ となり、外円の直径は $2r_4 \fallingdotseq 9.00393$ である。これは、算額の答曰の「九寸零零有奇」と一致する。