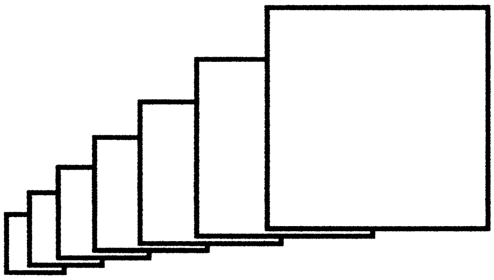
4.3 佐野長次郎

【問題文】



図のように、多くの正方形が並んでいる (図は仮に 7 個の正方形を描いた)。これらの正方形の面積の総和は 238,394,365,321 歩、正方形の一辺の長さの総和は 966,721 寸である。一辺の長さはひとつ前の一辺の長さの $\frac{2}{5}$ ずつ短くなっていくとき、最初の正方形の一辺の長さを求めよ。

【現代解】

正方形の個数を n、最初の正方形の一辺の長さを a、各正方形の一辺の長さを a_i とする。数列 $\{a_i\}$ は初項が a で、公比 $r = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ の等比数列である。また、$A = 966721$、$B = 238394365321$ とおく。このとき、

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = A, \qquad a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \frac{a^2(r^{2n} - 1)}{r^2 - 1} = B$$

より

$$ar^n = (r - 1)A + a, \qquad (ar^n)^2 = (r^2 - 1)B + a^2$$

となり、従って

$$((r - 1)A + a)^2 = (r^2 - 1)B + a^2$$

を得る。これを整理して、

$$a = \frac{(1 - r)A}{2} + \frac{(1 + r)B}{2A} = \frac{A}{5} + \frac{4B}{5A} = 390625$$

となる。また、n を求めると、$n = 9$ である。

【算額の解】

術曰は

$$\text{正方形の一辺の長さ（首方面）}\quad a = \frac{B}{A} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\left(A - \frac{B}{A}\right) = \frac{A}{5} + \frac{4}{5}\left(\frac{B}{A}\right)$$

で、答曰は

390625 寸

と示されている。これは、現代解と一致する。

算額には面積の総和 $B = 338,394,365,321$ とある。再度、額面を調査したが、最初の数は「三」と読める。しかし、これは「二」の書き間違いである。この解、師小島が著した『容術』にあり、これには $B = 238,394,365,321$ とあり、$\dfrac{B}{A} = 246,601$ も求めている。

愛媛の算額で唯一数列（級数）を扱った貴重な額であるが、一方では当時のソロバンの計算、12 桁の剰余を誇示し、あわせて、答えが整数となる問題としている。