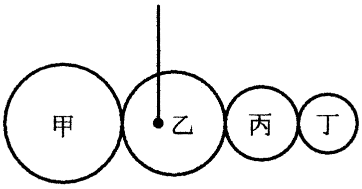
4.16 伊崎為次郎・石崎良蔵

【問題文】

（右）



図のように、甲、乙、丙、丁の４円がある。これを水平につるすときの支点（重心）について、４円の直径の長さが与えられたとき、支点（重心）から甲円の左端の点までの距離を求めよ。

【現代解】

重心については次の性質が成り立つ。n 個の物体があり、それぞれの重心を $G_1, G_2, \ldots, G_n$ とし、それぞれの重さ (ここでは面積) を $w_1, w_2, \ldots, w_n$ とするとき、全体の重心 G の位置ベクトルは

$$\overrightarrow{OG} = \frac{w_1\overrightarrow{OG_1} + w_2\overrightarrow{OG_2} + \cdots + w_n\overrightarrow{OG_n}}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n} \tag{1}$$

である。

甲円の左端の点を原点とし、甲、乙、丙、丁円の半径をそれぞれ a, b, c, d とするとき、４円の中心の x 座標はそれぞれ

$$a, \quad 2a + b, \quad 2a + 2b + c, \quad 2a + 2b + 2c + d$$

で、４円の面積はそれぞれ

$$\pi a^2, \quad \pi b^2, \quad \pi c^2, \quad \pi d^2$$

なので、上の公式 (1) を利用して全体の重心の x 座標を計算すると、

$$x = \frac{a^3 + b^2(2a + b) + c^2(2a + 2b + c) + d^2(2a + 2b + 2c + d)}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

従って

$$x = \frac{a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 2a(b^2 + c^2 + d^2) + 2b(c^2 + d^2) + 2cd^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \tag{2}$$

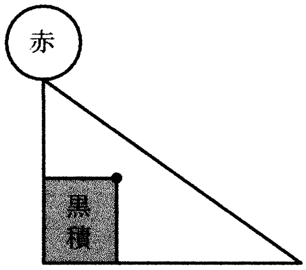
となる。これが重心から甲円の左端の点までの距離である。

【算額の解】

算額の術日の表現がはっきりとしないので解釈できない。

【問題文】

（左）



図のように、直角三角形と赤円がある。これを水平につるすときの支点（重心・黒点）について、直角三角形の直角をはさむ 2 辺の長さと赤円の面積が与えられたとき、黒の長方形の面積（黒積）を求めよ。

【現代解】

図 38 のように、直角三角形 BOA の直角をはさむ 2 辺を x, y 軸とし、2 辺 OA, OB の長さをそれぞれ a, b とし、赤円の面積を S、半径を r とする。また、直角三角形と赤円を合わせた図形の重心を $G(x, y)$ とする。

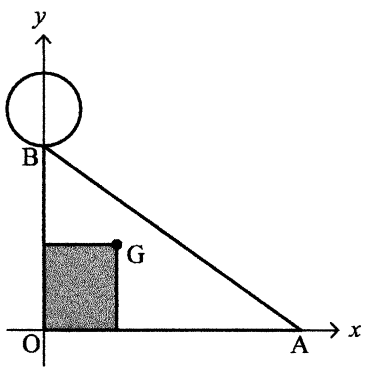


図 38: 左の問題の図

直角三角形の重心の座標は $(\frac{a}{3}, \frac{b}{3})$ で、直角三角形の面積は $S_1 = \dfrac{ab}{2}$ である。また、赤円の半径は r なので、赤円の重心の座標は $(0, b + r)$ である。

従って、全体の図形の重心 G の座標は (1) により、

$$\begin{aligned} x &= \frac{S_1 \cdot \frac{a}{3} + S \cdot 0}{S_1 + S} = \frac{a^2 b}{3(ab + 2S)} \\ y &= \frac{S_1 \cdot \frac{b}{3} + S \cdot (b + r)}{S_1 + S} = \frac{ab^2 + 6S(b + r)}{3(ab + 2S)} \end{aligned}$$

となり、黒の長方形の面積（黒積）は

$$xy = \frac{a^2 b\{ab^2 + 6S(b + r)\}}{9(ab + 2S)^2} \tag{3}$$

となる。

最後に赤円の面積は $S = \pi r^2$ なので、赤円の半径は $r = \sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$ となり、これを (2) に代入することで黒積は

$$xy = \frac{a^2 b\left\{ab^2 + 6S\left(b + \sqrt{\dfrac{S}{\pi}}\right)\right\}}{9(ab + 2S)^2} \tag{4}$$

となる。

【算額の解】

算額の術曰には、

$$黒積 = \frac{a^2b\{ab^2 + S(3S + 4b)\}}{9(ab + 2S)^2}$$

と書かれていて、式 (3) とよく似ているが、異なっている。

上の式の中で、$3S + 4b$ の部分の算額での表現は「列赤積三段加鈎四段」である。これを「列赤径三段加鈎六段」と置き換えると

$$黒積 = \frac{a^2b\{ab^2 + S(3(2r) + 6b)\}}{9(ab + 2S)^2}$$

となり現代解と一致するので、書き間違えがあったものと思われる。