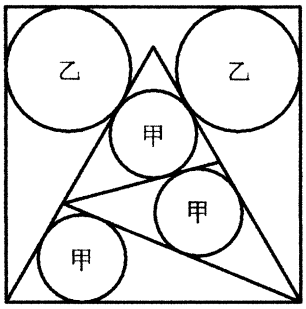
4.24　花山金次郎

【問題文】



図のように、正方形内に正三角形がり、正三角形の内部に2斜と甲円3個を容れる。また正三角形と正方形の間に乙円2個を容れる。乙円の直径が既知のとき甲円の直径を求めよ。

【現代解】

正方形の1辺の長さを a とし、甲円の半径を r、乙円の半径を R とする。伊佐爾波神社に奉納された花山金次郎の算額の現代解で示したように、a と r の関係については3次方程式

$$5t^3 - 21t^2 + 27t - 9 = 0 \tag{1}$$

の唯一の実解を $t = t_1$ とおくとき、

$$r = \frac{\sqrt{3}}{6}at_1 \tag{2}$$

である。

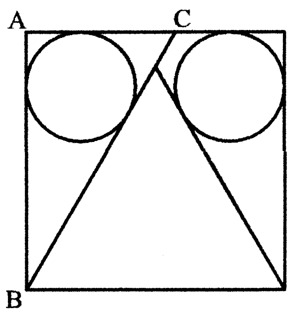


図 48: 花山の問題

また、図48のように乙円は $\triangle$ABC の内接円であるため、補助定理2により、

$$R = \frac{a + \frac{\sqrt{3}}{3}a - \frac{2\sqrt{3}}{3}a}{2} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}a$$

よって、

$$a = \left(3 + \sqrt{3}\right)R \tag{3}$$

となる。これを (2) に代入して

$$r = \frac{\sqrt{3}+1}{2}t_1R \tag{4}$$

を得る。

最後に、補助定理 15 により

$$t_1 = \frac{7 - \sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4}}{5} \tag{5}$$

なので、これを (4) に代入すると

$$r = \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(7 - \sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4}\right)}{10}R \tag{6}$$

となる。

【算額の解】

算額の術曰には、4 次方程式

$$20t^4 - 99t^3 + 171t^2 - 117t + 27 = 0$$

の解 $t = t_1$ を求め

$$\text{甲円直径} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}t_1 \times \text{乙円直径}$$

とある。伊佐爾波神社の花山金次郎の算額で述べたように、この 4 次方程式は

$$20t^4 - 99t^3 + 171t^2 - 117t + 27 = (4t-3)(5t^3 - 21t^2 + 27t - 9)$$

と因数分解できることにより、術曰は現代解と一致する。