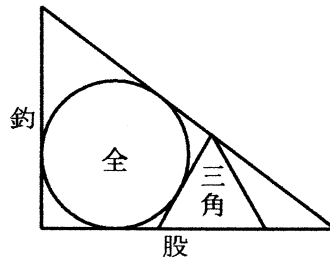


4.25 松岡多三郎

【問題文】



図のように、直角三角形(釣股)内に円と正三角形を入れる。直角をはさむ2辺のうち、釣の長さが108間6合、股の長さが144間8合であるとき正三角形の1辺の長さはいくらか。

【現代解】

図49のように、直角三角形ABCの3辺を $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ とし、円の中心をO、半径を r 、辺CAとの接点をTとし、正三角形DEFの1辺の長さを x とする。

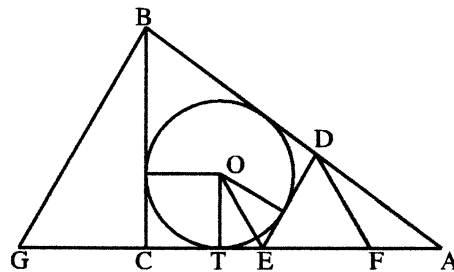


図 49: 松岡の問題

頂点Bを通り辺DEと平行な直線が辺CAの延長線と交わる点をGとする。このとき、 $\triangle BGA$ と $\triangle DEA$ が相似であることを利用して x を求めることにする。

最初に $\triangle ABC$ は直角三角形なので

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (1)$$

その内接円の半径 r は補助定理2により

$$r = \frac{a + b - c}{2} \quad (2)$$

である。また、 $\angle BGC = 60^\circ$ なので、 $GC = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, $BG = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$ である。また、 $CT = OT = r$ と $\angle OET = 60^\circ$

により、 $TE = \frac{\sqrt{3}}{3}r$ である。 $\triangle BGA$ と $\triangle DEA$ が相似なので、 $BG : GA = DE : EA$ より、

$$GA \cdot DE = BG \cdot EA$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a + b\right)x &= \frac{2\sqrt{3}}{3}a \left(b - r - \frac{\sqrt{3}}{3}r\right) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}a \left(b - \frac{3 + \sqrt{3}}{6}(a + b - c)\right) \end{aligned}$$

これを整理して、

$$x = \frac{(3 + \sqrt{3})c + (3 - \sqrt{3})b - (3 + \sqrt{3})a}{3(a + \sqrt{3}b)} a \quad (3)$$

である。

$a = 108.6, b = 144.8$ のとき $c = 181$ となるので (実は $a : b : c = 3 : 4 : 5$ である)、これを代入すると、

$$x = 53.000478 \dots \quad (4)$$

である。

【算額の解】

算額の答には、正三角形の1辺の長さは53間有奇とあり、式(4)と一致する。また、術曰に述べられている式を整理すると、

$$x = \frac{2(b + c - a)}{\sqrt{3} \cdot \frac{b + c}{a} + 3} \quad (5)$$

となっている。一見、式(3)とは全く違って見えるが、両式の差を計算してみると、

$$\frac{(1 + \sqrt{3})a(a^2 + b^2 - c^2)}{(a + \sqrt{3}b)(3a + \sqrt{3}b + \sqrt{3}c)}$$

となり、(1)よりこれは明らかに0である。この問題は、計算方法によって違った式が答として出てきて、それが同じものであることの確認に手間取る、厄介な問題である。式としては(3)より術曰の(5)の方が簡潔で美しい。