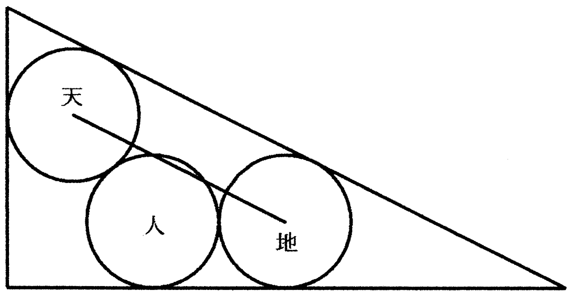
### 4.28　別宮四郎兵衛

【問題文】




図のように、直角三角形内（鈎股弦）に天、地、人の 3 円を入れる。ただし、3 円の直径は等しい。天円の中心から地円の中心までの距離が既知、股と弦の差より鈎は既知だけ長い。直角三角形の 3 辺と円の直径はいくらか。

【現代解】

図 55 のように、直角三角形を $\triangle$ABC とし、天地人 3 円の中心をそれぞれ P, Q, R とする。また、PQ の中点を M とする。直角三角形の 3 辺の長さを BC = $a$, CA = $b$, AB = $c$、最初の既知の長さを PQ = IH = $2p$、2 つ目の既知の長さを $a+b-c=2q$、円の半径を $x$ とする。この問題は $p, q$ が与えられたとき、$a, b, c, x$ を求めよということである。

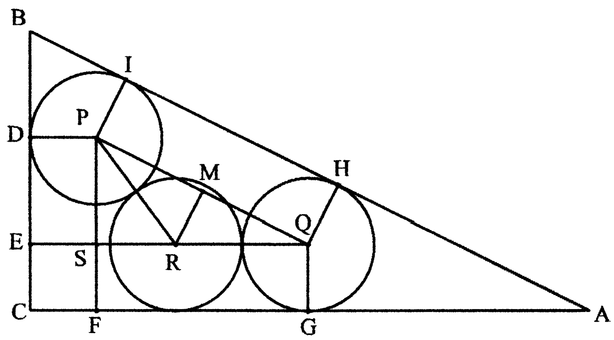



図 55: 別宮の問題

最初に $q$ について計算する。BD = BI, GA = HA であることにより、

$$2q = a + b - c = (\mathrm{BD} + \mathrm{DE} + x) + (x + \mathrm{FG} + \mathrm{GA}) - (\mathrm{BI} + \mathrm{IH} + \mathrm{HA}) = \mathrm{PS} + 2x + \mathrm{SQ} - 2p$$

従って、

$$\mathrm{PS} + \mathrm{SQ} = 2(p + q - x) \tag{1}$$

である。

次に、$\triangle$PSQ ∽ $\triangle$RMQ に着目する。SQ : PQ = MQ : RQ により、

$$\mathrm{SQ} = \frac{p^2}{x} \tag{2}$$

である。また、PS : PQ = RM : RQ と $\mathrm{RM} = \sqrt{\mathrm{RQ}^2 - \mathrm{MQ}^2} = \sqrt{4x^2 - p^2}$ により、

$$\mathrm{PS} = \frac{p}{x}\sqrt{4x^2 - p^2} \tag{3}$$

である。

そこで、(1) に (2) と (3) を代入すると、

$$\frac{p^2}{x} + \frac{p}{x}\sqrt{4x^2 - p^2} = 2(p + q - x)$$

となる。これを整理すると、4 次方程式

$$2x^4 - 4(p+q)x^3 + 2(p+q)^2x^2 - 2p^2(p+q)x + p^4 = 0 \tag{4}$$

が得られる。

この方程式はこれ以上整理することは無理のようである。$p, q$ の具体的な値が分かっていれば、4 次方程式を解くフェラーリの公式に代入して $x$ を求めたり、数値計算で $x$ の近似値を求めたりすることは可能であるが、算額には $p, q$ の値が書かれていないのでこれ以上の計算はしないことにする。

問題文には直角三角形の 3 辺の長さ $a, b, c$ も求めよとあるので、4 次方程式 (4) の解 $x$ が求まったと仮定して、3 辺の長さ求めてみる。それには △ABC ∽ △RMQ であることを利用する。その相似比が分かればよいので、2 つの直角三角形の内接円の半径を求めることにする。補助定理 2 により、△ABC の内接円の半径は $q$ である。同様に、△RMQ の内接円の半径は $\frac{1}{2}(\sqrt{4x^2 - p^2} + p - 2x)$ である。従って、直角三角形の 3 辺の長さは

$$a = \frac{2q}{\sqrt{4x^2 - p^2} + p - 2x} \cdot \sqrt{4x^2 - p^2}$$

$$b = \frac{2q}{\sqrt{4x^2 - p^2} + p - 2x} \cdot p$$

$$c = \frac{2q}{\sqrt{4x^2 - p^2} + p - 2x} \cdot 2x$$

である。

【算額の解】

この算額は問題のみで解は書かれていない。