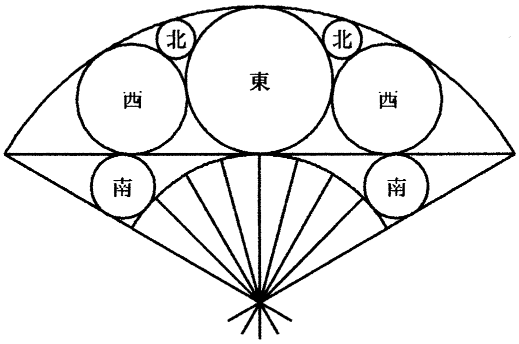
4.18 高阪金次郎

【問題文】



図のように、中心角 120° の扇形内に東円 1 個、西円、南円、北円がそれぞれ 2 個ある。南円の直径の長さが与えられたとき、北円の直径の長さを求めよ。

【現代解】

扇形の半径を r とし、東円、西円、南円、北円それぞれの半径を x, y, z, w とする。東円の半径 x は、扇形の中心角が 120° なので、

$$x = \frac{1}{4}r \tag{1}$$

である。

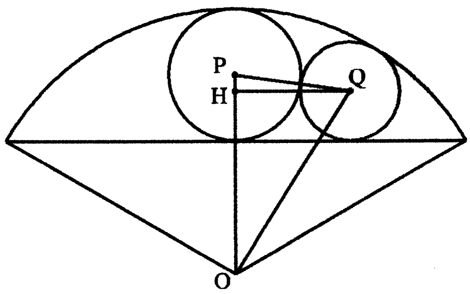


図 40: 西円を求める

扇形の中心を O、東円の中心を P、西円の中心を Q とし、Q から直線 PO に下ろした垂線の足を H とするとき、$QH^2 = PQ^2 - PH^2 = OQ^2 - OH^2$ より、

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = (r-y)^2 - (\frac{r}{2}+y)^2$$

(1) 式を代入し整理すると、

$$y = \frac{3}{16}r \tag{2}$$

となる。

扇形の弦を AB とし、南円の中心を R、R から直線 OB に下ろした垂線の足を K とする。弦 AB の下側にある小さい扇形の半径は $\frac{r}{2}$ である。ここで $\angle RBK = 15°$ より、$BK = z\cot 15° = (2+\sqrt{3})z$ となるので、$\triangle ROK$ に三平方の定理を用いると、

$$z^2 + \left(r - (2+\sqrt{3})z\right)^2 = \left(\frac{r}{2}+z\right)^2$$

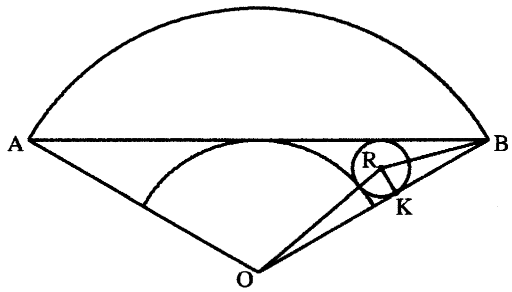


図 41: 南円を求める

これを整理することにより、

$$(r-2z)(3r-14z-8\sqrt{3}z)=0$$

となる。ここで、$r=2z$ は南円が大きすぎて不適。従って、

$$r=\frac{2}{3}(7+4\sqrt{3})z \tag{3}$$

となる。

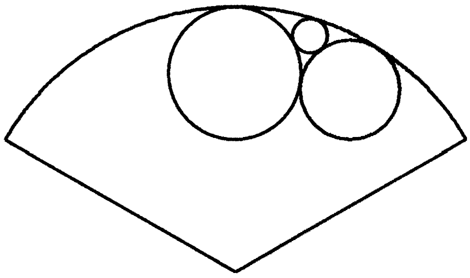


図 42: 北円を求める

北円の半径 w については、補助定理 19 (3) に東円、西円、北円、扇形の半径を代入すると、

$$\left(\frac{4}{r}+\frac{16}{3r}+\frac{1}{w}-\frac{1}{r}\right)^2=2\left(\left(\frac{4}{r}\right)^2+\left(\frac{16}{3r}\right)^2+\left(\frac{1}{w}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2\right)$$

分母を払い整理すると、$193w^2-150rw+9r^2=0$ となるので、$w=\dfrac{3(25\pm 12\sqrt{3})}{193}r$ である。ここで、$\dfrac{3(25+12\sqrt{3})}{193}=0.71167\cdots$ は北円の半径が大きすぎるので不適。従って、

$$w=\frac{3(25-12\sqrt{3})}{193}r \tag{4}$$

となる。

最後に、式 (4) に (3) を代入することで

$$w=\frac{2}{193}(31+16\sqrt{3})z \tag{5}$$

となる。従って北円の直径と南円の直径の比は

$$\frac{2w}{2z}=\frac{2}{193}(31+16\sqrt{3})=0.6084229\cdots$$

である。

【算額の解】

算額の術日には、

$$\text{北円直径}=\frac{\sqrt{3072}+62}{193}\cdot\text{南円直径}$$

とあり、現代解と一致する。