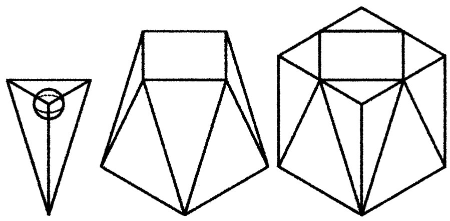
4.6 仙波収平

【問題文】



図のように、上面が正方形の直方体において、上面の各辺の中点より下面の 4 つの頂点を結ぶ線分含む平面で切り取ってできる 4 個の三角錐の一個に球を内接させる。上面にできた正方形の周の長さと切断面のすべての斜線の長さの和が 77 寸のとき、切り取られてできた立体の表面積が最大になるときの内接球の表面積を求めめよ。

【現代解】

与えられた和を $p = 77$ とし、上面の正方形の 1 辺の長さを $2a$、直方体の高さを h とする。

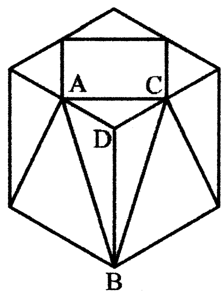


図 9: 仙波の問題

図 9 のように、三角錐 ABCD の切り口は二等辺三角形 $\triangle ABC$ で、等辺の長さは $AB = BC = \sqrt{a^2 + h^2}$、底辺の長さは $AC = \sqrt{2}a$ である。その切り口の長さの和が p となるので、

$$4(\sqrt{2}a + 2\sqrt{a^2 + h^2}) = p \tag{1}$$

である。この立体の表面積 S は

$$S = (\sqrt{2}a)^2 + (2a)^2 + 4 \cdot ah + 4 \cdot \frac{\sqrt{2}a}{2}\sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}$$

従って、

$$S = 6a^2 + 4ah + 2\sqrt{2}a\sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2} \tag{2}$$

である。

切り取った三角錐の体積を V_1、表面積を S_1 とすると

$$V_1 = \frac{a^2h}{6}$$

$$S_1 = \frac{a^2}{2} + ah + \frac{a}{2}\sqrt{a^2 + 2h^2}$$

となる。三角錐に内接する球の半径 r は、$V_1 = \frac{1}{3} r S_1$ であることにより

$$r = \frac{3V_1}{S_1} = \frac{ah}{a + 2h + \sqrt{a^2 + 2h^2}} \tag{3}$$

である。三角錐に内接する球の表面積 K は

$$K = 4\pi r^2 \tag{4}$$

である。

そこで数値計算により、条件 (1) のもとで、(2) の最大値を求めると、

$$S = 291.0888 \qquad (a = 5.181290, \quad h = 2.948057) \tag{5}$$

であった。図 10 がそのときの直方体の形である。また、このときの r, K の値は

$$r = 0.8616259, \qquad K = 9.329264 \tag{6}$$

となる。

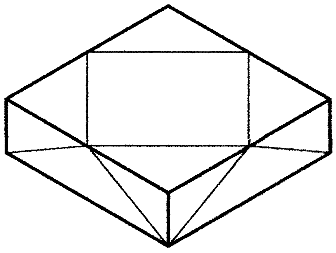


図 10: S を最小にするときの直方体

【算額の解】

算額の術日には、

$$\text{球の表面積}\,(K) = \frac{\sqrt{10} - 3}{\dfrac{32}{\sqrt{10}} + 17.6} \times \pi \times 0.9 \times 77^2$$

と示されている。また、答日には「100 歩有奇」とある。

しかし、現代解の (6) での K の値とはあまりにも大きな違いがある。問題文の解釈などを変えて、いろいろと試みたがいい答には出会えなかった。どこかで思い違いをされたと思われ残念である。