5 補助定理

補助定理 1　次の公式が成り立つ。

$$\int_a^r \sqrt{r^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}\left(r^2 \cos^{-1}\frac{a}{r} - a\sqrt{r^2 - a^2}\right)$$

ただし、$0 < a < r$ とする。

（証明）　図の灰色の部分の面積を求める定積分である。従って、扇型 OAB と △OHB の面積を求めればよい。

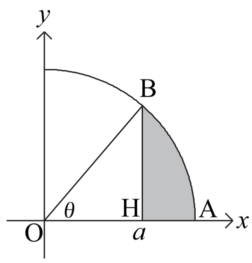


図 1: 補助定理 1

扇型 OAB の中心角を θ とすると $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ であり、その面積 S_1 は

$$S_1 = \frac{r^2\theta}{2} = \frac{r^2}{2}\cos^{-1}\frac{a}{r}$$

である。また、△OHB の面積 S_2 は、$\mathrm{OH} = a,\ \mathrm{BH} = \sqrt{r^2 - a^2}$ により、

$$S_2 = \frac{1}{2}a\sqrt{r^2 - a^2}$$

である。従って、

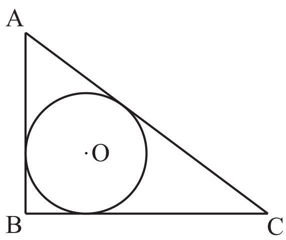
$$\int_a^r \sqrt{r^2 - x^2}dx = S_1 - S_2 = \frac{1}{2}\left(r^2 \cos^{-1}\frac{a}{r} - a\sqrt{r^2 - a^2}\right)$$

である。

補助定理 2　辺 CA を斜辺とする直角三角形 ABC の内接円の半径を r とするとき

$$r = \frac{\mathrm{AB} + \mathrm{BC} - \mathrm{CA}}{2}$$

が成り立つ。



和算で良く使われる公式である

（証明）内接円 O と 3 辺 BC, CA, AB の接点をそれぞれ D, E, F とする。
このとき、

$$\mathrm{AE} = \mathrm{AF}, \quad \mathrm{BD} = \mathrm{BF} = r, \quad \mathrm{DC} = \mathrm{EC}$$

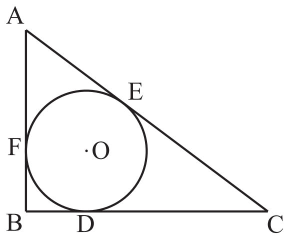


図 2: 補助定理 2

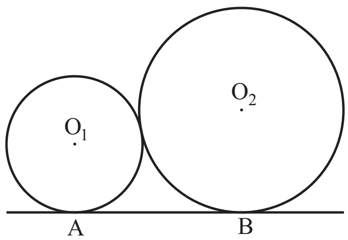
が成り立つ、従って、

$$\begin{aligned} r &= \frac{\mathrm{BD} + \mathrm{BF}}{2} \\ &= \frac{\mathrm{BC} - \mathrm{DC} + \mathrm{AB} - \mathrm{AF}}{2} \\ &= \frac{\mathrm{BC} - \mathrm{EC} + \mathrm{AB} - \mathrm{AF}}{2} \\ &= \frac{\mathrm{AB} + \mathrm{BC} - \mathrm{CA}}{2} \end{aligned}$$

補助定理 3　2 円 O_1、O_2 は互いに外接し、直線 l に 2 点 A、B で接している。円 O_1、O_2 の半径をそれぞれ r_1、r_2 とするとき、

$$\mathrm{AB} = 2\sqrt{r_1 r_2}$$

である。



この補助定理は『算法助術』の公式 40 である。

（証明）O_1 から $\mathrm{O}_2\mathrm{B}$ に下ろした垂線の足を H とする。

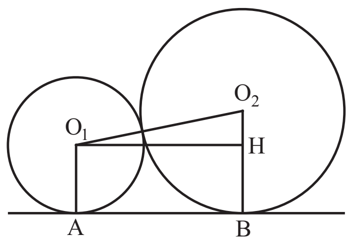


図 3: 補助定理 3

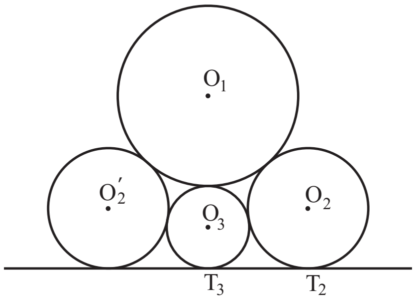
$\triangle \mathrm{O}_2\mathrm{O}_1\mathrm{H}$ に三平方の定理を用いると、

$$\begin{aligned} \mathrm{AB} &= \mathrm{O}_1\mathrm{H} \\ &= \sqrt{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2{}^2 - \mathrm{O}_2\mathrm{H}^2} \\ &= \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_2 - r_1)^2} \\ &= \sqrt{4 r_1 r_2} \\ &= 2\sqrt{r_1 r_2} \end{aligned}$$

が得られる。

補助定理 4　直線上に半径が r_2, r_3, r_2 の連結する 3 個の円 O_2', O_3, O_2 がのっている。これら 3 円に外接する円 O_1 の半径 r_1 は次式で与えられる。

$$r_1 = \frac{r_3^2}{r_2 - r_3}$$



この補助定理は『算法助術』の公式 66 である。

（証明）O_2 から線分 O_1O_3 に引いた垂線の足を H とする。

補助定理 3 により、

$$HO_2 = T_3T_2 = 2\sqrt{r_2r_3}$$

である。また、$\triangle O_1HO_2$ に対して三平方の定理を用いると、

$$HO_2{}^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 + 2r_3 - r_2)^2 = 4r_1(r_2 - r_3) + 4r_2r_3 - 4r_3^2$$

である。この 2 式から、

$$r_1(r_2 - r_3) = r_3^2$$

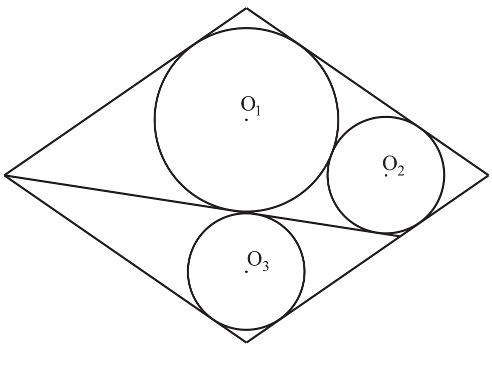
$$r_1 = \frac{r_3^2}{(r_2 - r_3)}$$

を得る。

補助定理 5　図のように、菱形を線分で 2 つに分け、その上側に円 O_1 と円 O_2 を入れ、下側に円 O_3 を内接させる。3 円 O_1、O_2、O_3 の半径をそれぞれ r_1、r_2、r_3 とするとき、関係式

$$4r_1^3 - 4r_1^2r_2 - 3r_1r_3^2 - r_2r_3^2 = 0$$

が成り立つ。



この補助定理は会田安明『算法天生法指南』（1810 年）の問題 190 である。大変難しい問題である。証明については、藤井康生著『最上流 算法天生法指南（全五巻）問題の解説』大阪教育図書（1997 年）の pp. 198–201 を参照ください。

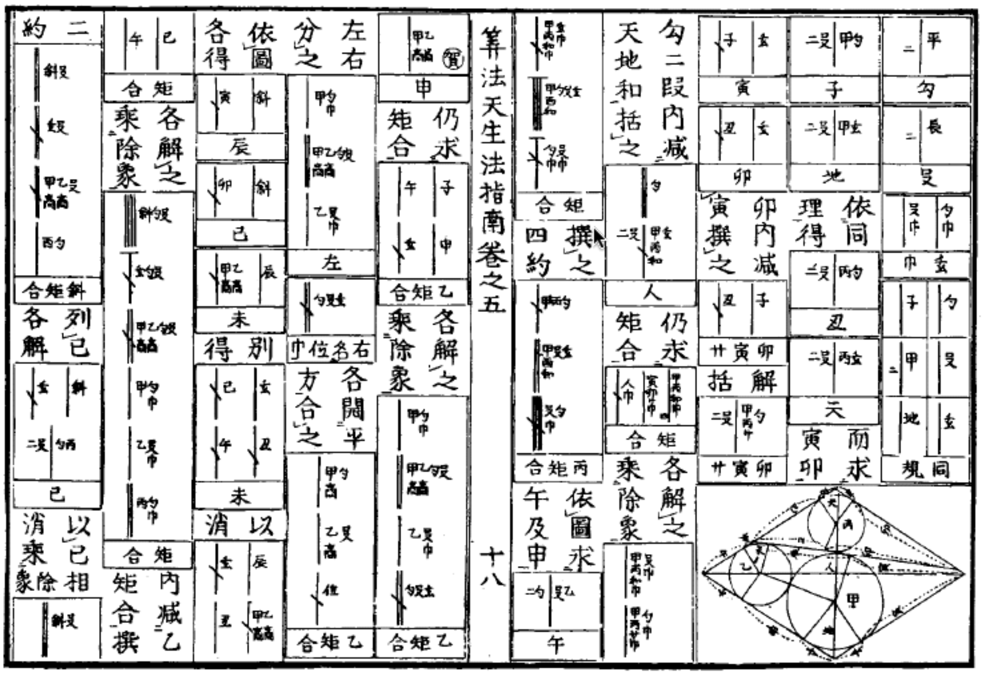
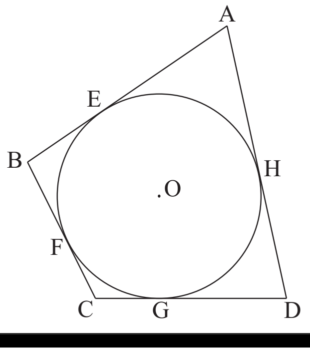


図 4: 『算法天生法指南』より一部引用

補助定理 6　図のように円 O に外接する四角形 ABCD がある。接線の長さを AE = AH = a, BE = BF = b, CF = CG = c, DG = DH = d とし、円 O の半径を r とする。このとき、

$$(a + b + c + d)r^2 = abc + abd + acd + bcd$$

が成り立つ。



この補助定理は『算法助術』の公式 37 である。

（証明）　$\angle \mathrm{AOE} = \theta_1$, $\angle \mathrm{BOF} = \theta_2$, $\angle \mathrm{COG} = \theta_3$, $\angle \mathrm{DOH} = \theta_4$ とするとき、

$$\pi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$$

である。両辺の tan をとり、加法定理を用いて展開すると

$$
\begin{aligned}
0 &= \tan(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4) \\
&= \frac{\tan(\theta_1+\theta_2)+\tan(\theta_3+\theta_4)}{1-\tan(\theta_1+\theta_2)\tan(\theta_3+\theta_4)} \\
&= \frac{\dfrac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}+\dfrac{\tan\theta_3+\tan\theta_4}{1-\tan\theta_3\tan\theta_4}}{1-\dfrac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}\cdot\dfrac{\tan\theta_3+\tan\theta_4}{1-\tan\theta_3\tan\theta_4}}
\end{aligned}
$$

となり、従って

$$\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}+\frac{\tan\theta_3+\tan\theta_4}{1-\tan\theta_3\tan\theta_4}=0$$

である。この式に $\tan\theta_1=\dfrac{a}{r},\ \tan\theta_2=\dfrac{b}{r},\ \tan\theta_3=\dfrac{c}{r},\ \tan\theta_4=\dfrac{d}{r}$ を代入して整理すると、

$$\frac{r(a+b)}{r^2-ab}+\frac{r(c+d)}{r^2-cd}=0$$

$$(r^2-cd)(a+b)+(r^2-ab)(c+d)=0$$

$$(a+b+c+d)r^2-(abc+abd+acd+bcd)=0$$

を得る。

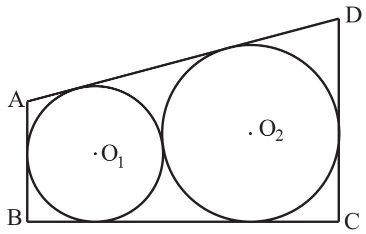
補助定理 7　図のように接する 2 円 O_1、O_2 と 2 円に外接する四角形 ABCD がある。ただし、$\angle B$ と $\angle C$ は直角とする。円 O_1, O_2 の半径をそれぞれ r_1, r_2 とするとき、

(1)　$\mathrm{BC}=\left(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}\right)^2$

(2)　$\mathrm{AB}=\dfrac{4\sqrt{r_1r_2}}{2\sqrt{r_1r_2}-r_1+r_2}\,r_1$

(3)　$\mathrm{CD}=\dfrac{4\sqrt{r_1r_2}}{2\sqrt{r_1r_2}+r_1-r_2}\,r_2$

が成り立つ。



（証明）　図 5 のように 2 円の接点を E とし、共通内接線を FG とする。2 円と四角形との接点を図のように $S_1, S_2, T_1, T_2, U_1, U_2$ とする。

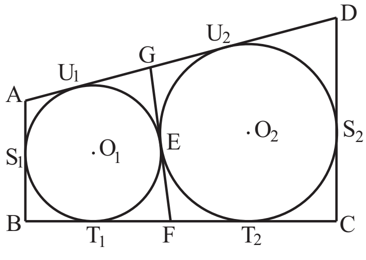


図 5: 補助定理 7

（1）$\mathrm{BT_1}=r_1,\ \mathrm{T_2C}=r_2$ で、補助定理 3 により、$\mathrm{T_1T_2}=2\sqrt{r_1r_2}$ である。従って、

$$\mathrm{BC}=r_1+2\sqrt{r_1r_2}+r_2=\left(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}\right)^2$$

である。

(2) 四角形 ABFG において、$BS_1 = BT_1 = r_1$, $FT_1 = FE = GE = GU_1 = \sqrt{r_1r_2}$ であることにより、$AU_1 = AS_1 = a$ とおき、補助定理 6 を用いると、

$$(a + r_1 + 2\sqrt{r_1r_2})r_1^2 = (2ar_1\sqrt{r_1r_2} + ar_1r_2 + r_1^2r_2)$$

である。a について解くと

$$a = \frac{2\sqrt{r_1r_2} + r_1 - r_2}{2\sqrt{r_1r_2} - r_1 + r_2}\,r_1$$

となり、従って

$$AB = a + r_1 = \frac{4\sqrt{r_1r_2}}{2\sqrt{r_1r_2} - r_1 + r_2}\,r_1$$

である。

(3) 四角形 GFCD においても同様に、$DU_2 = DS_2 = b$ とおくことで、

$$b = \frac{2\sqrt{r_1r_2} - r_1 + r_2}{2\sqrt{r_1r_2} + r_1 - r_2}\,r_2$$

となり、従って

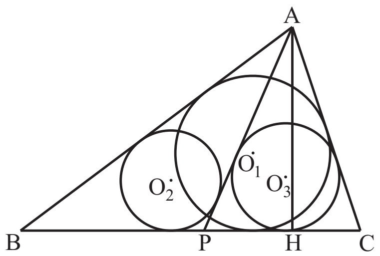
$$CD = b + r_2 = \frac{4\sqrt{r_1r_2}}{2\sqrt{r_1r_2} + r_1 - r_2}\,r_2$$

である。

補助定理 8　3 円 O_1, O_2, O_3 はそれぞれ $\triangle ABC$, $\triangle ABP$, $\triangle APC$ の内接円である。また、頂点 A から辺 BC に下ろした垂線の足を H とする。このとき、円 O_1, O_2, O_3 の半径をそれぞれ r_1, r_2, r_3 とし、$AH = h$ とするとき、

$$h(r_2 + r_3 - r_1) - 2r_2r_3 = 0$$

である。



この補助定理は『算法助術』の公式 57 である。

(証明)

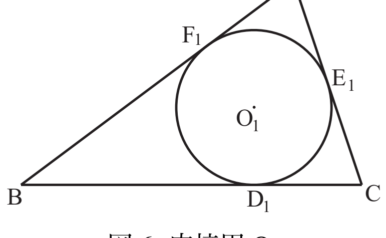


図 6: 内接円 O_1

図 6 のように、3 辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とし、$s = (a+b+c)/2$ とする。また、内接円 O_1 が 3 辺 BC, CA, AB と接する点をそれぞれ D_1, E_1, F_1 とし、$AF_1 = \alpha$, $BD_1 = \beta$, $CE_1 = \gamma$ とする。このとき、

$$\beta = s - b, \qquad \gamma = s - a \tag{A.1}$$

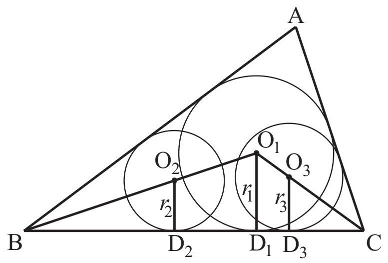


図 7: 半径の比

である。

図 7 のように、辺 BC と 3 円 O_1, O_2, O_3 の接点をそれぞれ D_1, D_2, D_3 とする。$\triangle\mathrm{O}_1\mathrm{BD}_1$ と $\triangle\mathrm{O}_2\mathrm{BD}_2$ は相似なので、$\mathrm{BD}_1 : \mathrm{BD}_2 = \beta : \mathrm{BD}_2 = r_1 : r_2$、同様に $\mathrm{CD}_1 : \mathrm{CD}_3 = \gamma : \mathrm{CD}_3 = r_1 : r_3$ となる。従って、

$$\mathrm{BD}_2 = \frac{r_2(s-b)}{r_1}, \qquad \mathrm{CD}_3 = \frac{r_3(s-c)}{r_1} \tag{A.2}$$

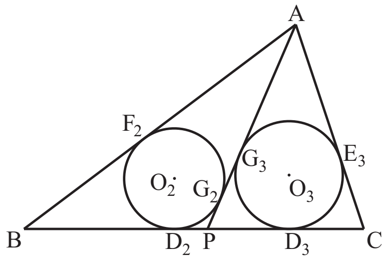


図 8: 内接円 $\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2$

次に、図 8 のように、円 O_2 が AB, AP と接する点をそれぞれ F_2, G_2 とし、円 O_3 が AC, AP と接する点をそれぞれ E_3, G_3 とする。

このとき、$\triangle\mathrm{ABP}$ の面積は、$\triangle\mathrm{ABP} = \frac{r_2}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BP}+\mathrm{PA}) = \frac{r_2}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BP}+\mathrm{PG}_3+\mathrm{AG}_3) = \frac{r_2}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BP}+\mathrm{PD}_3+\mathrm{AE}_3) = \frac{r_2}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BD}_3+\mathrm{AE}_3) = \frac{r_2}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}-\mathrm{CD}_3+\mathrm{CA}-\mathrm{CE}_3) = \frac{r_2}{2}(a+b+c-2\mathrm{CD}_3) = r_2(s-\mathrm{CD}_3)$ である。$\triangle\mathrm{APD}$ の面積についても同様である。従って、

$$\triangle\mathrm{ABP} = r_2(s-\mathrm{CD}_3), \qquad \triangle\mathrm{APC} = r_3(s-\mathrm{BD}_2) \tag{A.3}$$

ここで、式 (A.2) を代入すると、

$$\triangle\mathrm{ABP} = r_2 s - \frac{r_2 r_3(s-c)}{r_1}, \qquad \triangle\mathrm{APC} = r_3 s - \frac{r_2 r_3(s-b)}{r_1} \tag{A.4}$$

である。

最後に、$\triangle\mathrm{ABP} + \triangle\mathrm{APC} = \triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}ah$ なので、

$$(r_2+r_3)s - \frac{r_2 r_3(2s-b-c)}{r_1} = \frac{1}{2}ah$$

$$(r_2+r_3)s - \frac{a r_2 r_3}{r_1} = \frac{1}{2}ah$$

$$(r_2+r_3)r_1 s - a r_2 r_3 - \frac{1}{2}ahr_1 = 0$$

ここで、$r_1 s = \frac{1}{2}ah$ であることにより、

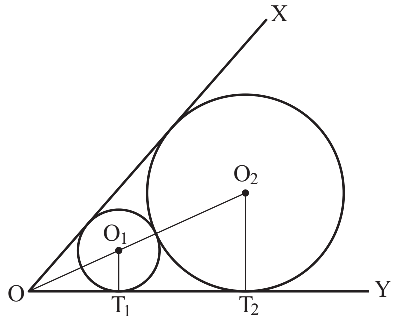
$$h(r_2+r_3-r_1) - 2r_2 r_3 = 0 \tag{A.5}$$

となる。

補助定理 9　図のように、$\angle$XOY に互いに外接する 2 円 O_1, O_2 が接している。2 円 O_1, O_2 と直線 OY との接点をそれぞれ T_1, T_2 とする。2 円 O_1, O_2 の半径をそれぞれ r_1, r_2 とし、$OT_1 = a_1$、$OT_2 = a_2$ とするとき、

$$a_1 = \frac{2r_1\sqrt{r_1r_2}}{r_2 - r_1}, \qquad a_2 = \frac{2r_2\sqrt{r_1r_2}}{r_2 - r_1}$$

である。



この補助定理は『算法助術』の公式 42 である。

（証明）　$\triangle O_1OT_1$ と $\triangle O_2OT_2$ は相似なので、$r_1 : a_1 = r_2 : a_2$ より

$$a_1r_2 = a_2r_1 \tag{A.6}$$

である。また補助定理 3 を用いると、$T_1T_2 = 2\sqrt{r_1r_2}$ なので

$$a_2 - a_1 = 2\sqrt{r_1r_2} \tag{A.7}$$

である。これら 2 式から a_2 を消去すると

$$a_1 = \frac{2r_1\sqrt{r_1r_2}}{r_2 - r_1}$$

となり、a_1 を消去すると

$$a_2 = \frac{2r_2\sqrt{r_1r_2}}{r_2 - r_1}$$

となる。

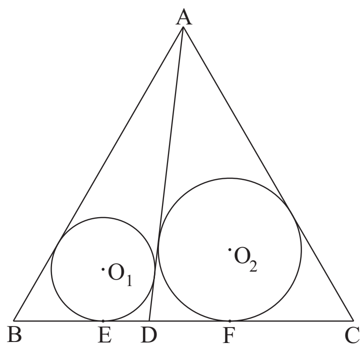
補助定理 10　正三角形 ABC 内に斜線 AD を引き、左右二つの三角形の内接円をそれぞれ O_1, O_2 とし、辺 BC との接点を E, F とする。正三角形 ABC の 1 辺の長さを a、2 円 O_1, O_2 の半径をそれぞれ r_1, r_2 とし、$DE = p, DF = q$ とする。このとき、

(1)　$p + q = a - \sqrt{3}(r_1 + r_2)$

(2)　$q - p = \sqrt{3}(r_2 - r_1)$

(3)　$p = \dfrac{a}{2} - \sqrt{3}r_2, \quad q = \dfrac{a}{2} - \sqrt{3}r_1$

が成り立つ。



この補助定理の (3) は『算法助術』の公式 16 である。

（証明）　図 9 のように接点 G, H, I, J を定める。$\angle O_1BE = \angle O_2CF = 30^\circ$ なので $BE = \sqrt{3}r_1, CF = \sqrt{3}r_2$ である。

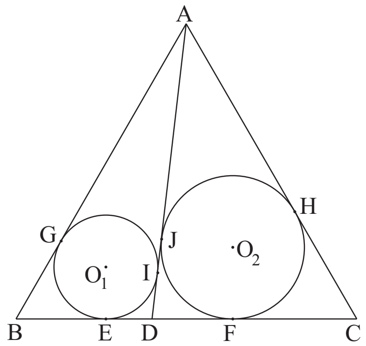


図 9: 補助定理 10

(1)　$p + q = \mathrm{DE} + \mathrm{DF} = \mathrm{EF} = \mathrm{BC} - \mathrm{BE} - \mathrm{CF} = a - \sqrt{3}(r_1 + r_2)$ である。

(2)　接線の性質を用いることで、

$$\begin{aligned} q - p &= \mathrm{DF} - \mathrm{DE} = \mathrm{DJ} - \mathrm{DI} = \mathrm{IJ} = \mathrm{AI} - \mathrm{AJ} = \mathrm{AG} - \mathrm{AH} \\ &= (a - \mathrm{BG}) - (a - \mathrm{CH}) = \mathrm{CF} - \mathrm{BE} = \sqrt{3}(r_2 - r_1) \end{aligned}$$

である。

(3)　連立方程式 (1), (2) を解くことで、

$$p = \frac{a}{2} - \sqrt{3}r_2, \quad q = \frac{a}{2} - \sqrt{3}r_1$$

を得る。

補助定理 11　正五角形が関わる問題に使われる三角比。$\theta = 36^\circ$ とするとき次が成り立つ。

$$\cos\theta = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \qquad \sin\theta = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$$

$$\cos 2\theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \qquad \sin 2\theta = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$$

$$\cos 3\theta = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \qquad \sin 3\theta = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$$

（証明）　$5\theta = 180^\circ$ なので、$3\theta = 180^\circ - 2\theta$ である。両辺の余弦をとると、

$$\cos 3\theta = \cos(180^\circ - 2\theta) = -\cos 2\theta$$

となるので 2 倍角、3 倍角の公式を用いると、

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 1 - 2\cos^2\theta$$

そこで、$\cos\theta = t$ とおけば、3 次方程式

$$4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = 0$$

$$(t + 1)(4t^2 - 2t - 1) = 0$$

となり、その解は

$$t = -1, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

となるが、$0 < t = \cos\theta < 1$ なので、

$$\cos\theta = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

を得る。また、

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$$

となる。2θ については、

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\sin 2\theta = \sqrt{1 - \cos^2 2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$$

となる。3θ については、

$$\cos 3\theta = -\cos 2\theta = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$$

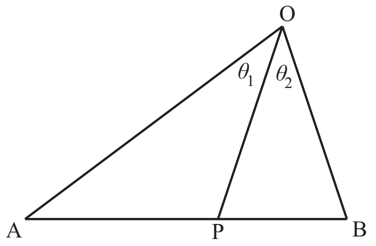
$$\sin 3\theta = \sin 2\theta = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$$

となる。

補助定理 12　$\triangle$OAB の辺 AB 上の任意の点を P とし、$\angle \mathrm{AOP} = \theta_1$、$\angle \mathrm{BOP} = \theta_2$、$\mathrm{OA} = a$、$\mathrm{OB} = b$、$\mathrm{OP} = p$ とする。このとき、

$$(a\sin\theta_1 + b\sin\theta_2)p = ab\sin(\theta_1 + \theta_2)$$

が成り立つ。特に、$\theta_1 = \theta_2$ のときは、$(a + b)p = 2ab\cos\theta_1$ である。



（証明）　3 つの三角形 $\triangle$OAP、$\triangle$OBP、$\triangle$OAB の面積を考える。

$$\triangle\mathrm{OAP} = \frac{1}{2}ap\sin\theta_1, \quad \triangle\mathrm{OBP} = \frac{1}{2}bp\sin\theta_2 \quad \triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}ab\sin(\theta_1 + \theta_2),$$

従って、$\triangle\mathrm{OAP} + \triangle\mathrm{OBP} = \triangle\mathrm{OAB}$ より、

$$(a\sin\theta_1 + b\sin\theta_2)p = ab\sin(\theta_1 + \theta_2)$$

となる。

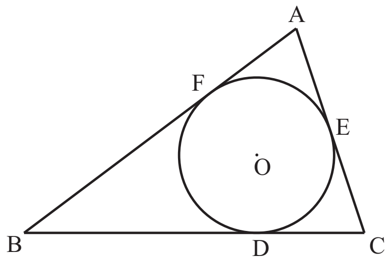
補助定理 13　$\triangle$ABC の内接円 O が、3 辺 BC, CA, AB とそれぞれ点 D, E, F で接している。BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$, AF $= \alpha$, BD $= \beta$, CE $= \gamma$ とし、また、$\triangle$ABC の面積を S、円 O の半径を r、$s = (a+b+c)/2$ とする。このとき

(1)　$S = sr$

(2)　$r^2 s = (s-a)(s-b)(s-c)$

(3)　$r^2(\alpha+\beta+\gamma) = \alpha\beta\gamma$

が成り立つ。



この補助定理は『算法助術』の公式 36 である。

（証明）

(1)　面積に着目して、

$$\begin{aligned} S &= \triangle\mathrm{OBC} + \triangle\mathrm{OCA} + \triangle\mathrm{OAB} \\ &= \frac{1}{2}(r\mathrm{BC} + r\mathrm{CA} + r\mathrm{AB}) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)r \\ &= sr \end{aligned}$$

(2)　ヘロンの公式 $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ を (1) に代入すればよい。

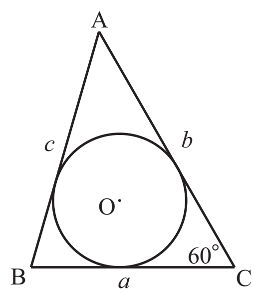
(3)　$s-a = \alpha,\ s-b = \beta,\ s-c = \gamma,\ s = (\alpha+\beta+\gamma)$ を (2) に代入すればよい。

補助定理 14　$\angle$C が 60° である $\triangle$ABC の内接円 O の半径を r とする。辺 BC、CA、AB の長さをそれぞれ a、b、c とするとき、次の関係式が成り立つ。

(1)　$2\sqrt{3}r = a+b-c$

(2)　$4ar + 4br - \sqrt{3}(ab + 4r^2) = 0$

(3)　$b = \dfrac{4r(\sqrt{3}r - a)}{4r - \sqrt{3}a}$



この補助定理は『算法助術』の公式 15 であるが、表現を少し変えている。

（証明）　内接円 O と 3 辺 BC、CA、AB との接点をそれぞれ D、E、F とする。

このとき、$\triangle$ODC は直角三角形で $\angle$OCD $= 30^\circ$ なので、CD $= \sqrt{3}r$ である。また、2CD $=$ CD $+$ CE $=$ (BC $-$ BD) $+$ (AC $-$ AE) $=$ (BC $-$ BF) $+$ (AC $-$ AF) $=$ BC $+$ AC $-$ AB $= a+b-c$ より、

$$2\sqrt{3}r = a+b-c \tag{A.8}$$

となる。余弦定理より $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60^\circ$ なので、

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab \tag{A.9}$$

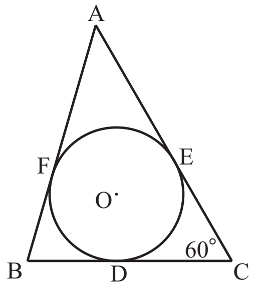


図 10: 補助定理 14

また、(A.8) より $c = a + b - 2\sqrt{3}r$ なので、これを式 (A.9) に代入して

$$(a + b - 2\sqrt{3}r)^2 = a^2 + b^2 - ab$$

これを整理すると (2) となる。さらに、この式を b で解いて (3) を得る。

補助定理 15　3 次方程式

$$5t^3 - 21t^2 + 27t - 9 = 0$$

はただ一つの実数解をもち、その実数解は

$$t = \frac{7 - \sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4}}{5}$$

である。

3 次方程式のカルダノの公式を用いて解いてみよう。

【カルダノの公式】　3 次方程式

$$x^3 + 3px + q = 0$$

の 3 解は、

$$x = \sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}, \quad \omega\sqrt[3]{\alpha} + \omega^2\sqrt[3]{\beta}, \quad \omega^2\sqrt[3]{\alpha} + \omega\sqrt[3]{\beta}$$

である。ただし、

$$\alpha = \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4p^3}}{2}, \quad \beta = \frac{-q - \sqrt{q^2 + 4p^3}}{2}, \quad \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2}$$

とする。

(証明)　方程式の両辺を 5 で割って、

$$t^3 - \frac{21t^2}{5} + \frac{27t}{5} - \frac{9}{5} = 0$$

とする。次に、$t = x + \dfrac{7}{5}$ を代入して 2 次の項を消去すると、

$$x^3 - \frac{12}{25}x + \frac{34}{125} = 0$$

となる。従って、

$$p = -\frac{4}{25}, \quad q = \frac{34}{125}$$

となるので、

$$\alpha = -\frac{2}{125}, \quad \beta = -\frac{32}{125}$$

となる。ゆえに、

$$x = \frac{-\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4}}{5}, \quad \frac{-\sqrt[3]{2}\omega - 2\sqrt[3]{4}\omega^2}{5}, \quad \frac{-\sqrt[3]{2}\omega^2 - 2\sqrt[3]{4}\omega}{5}$$

従って、

$$t = \frac{7 - \sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4}}{5}, \quad \frac{7 - \sqrt[3]{2}\omega - 2\sqrt[3]{4}\omega^2}{5}, \quad \frac{7 - \sqrt[3]{2}\omega^2 - 2\sqrt[3]{4}\omega}{5}$$

このなかで、実解は

$$t = \frac{7 - \sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4}}{5}$$

のみである。また、その近似解は

$$t \fallingdotseq 0.513055369$$

である。

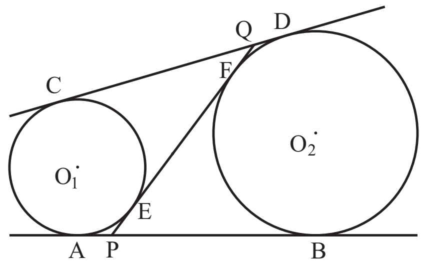
補助定理 16　図のように、2 円 O_1、O_2 の共通外接線を AB、CD とし、共通内接線を PQ とする。また、PQ と 2 円 O_1、O_2 との接点をそれぞれ E、F とする。このとき、

(1) PA = PE = QF = QD

(2) PB = PF = QE = QC

(3) AB = CD = PQ

である。



この補助定理は『算法助術』の公式 39 である。

（証明）　接線の性質より、PA = PE、PB = PF、QF = QD、QE = QC、AB = CD、は明らかである。従って、PA = PE = p、QD = QF = q と置くとき、$p = q$ を示せばよい。

ここで、

$$\mathrm{AB} = p + \mathrm{PB} = p + \mathrm{PF} = 2p + \mathrm{EF}$$

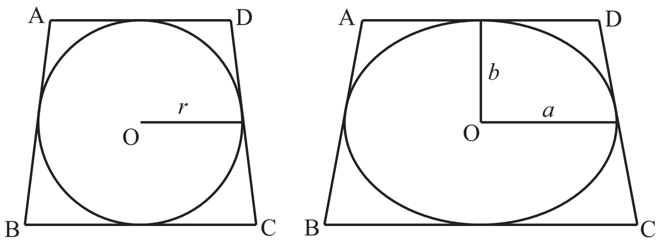
$$\mathrm{CD} = \mathrm{CQ} + q = \mathrm{EQ} + q = \mathrm{EF} + 2q$$

従って、AB = CD より $p = q$ を得る。

補助定理 17　図のように、円 $(x^2 + y^2 = r^2)$ または楕円 $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1)$ に外接する等脚台形 ABCD がある。ただし、上底 AD と下底 BC は x 軸と平行とする。このとき、

$$\mathrm{AD} \cdot \mathrm{BC} = 4r^2, \qquad \mathrm{AD} \cdot \mathrm{BC} = 4a^2$$

が成り立つ。



この補助定理は『算法助術』の公式 82 である。

（証明）　円の場合も同様なので、ここでは、楕円の場合を証明する。

楕円上の 1 点を $P(x_1,\ y_1)$ $(x_1 > 0)$ とするとき、点 P における接線の方程式は、

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \qquad \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1\right) \tag{A.10}$$

である。下底 $y = -b$ と (A.10) の交点 C の座標を計算すると、

$$\mathrm{C}\left(\frac{a^2}{x_1}\left(1 + \frac{y_1}{b}\right),\ -b\right) \tag{A.11}$$

同様に、上底 $y = b$ と (A.10) の交点 D の座標を計算すると、

$$\mathrm{D}\left(\frac{a^2}{x_1}\left(1 - \frac{y_1}{b}\right),\ b\right) \tag{A.12}$$

従って、

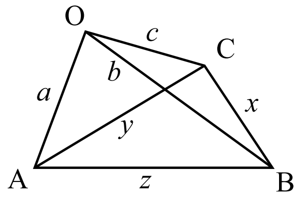
$$\begin{aligned} \mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC} &= 2\frac{a^2}{x_1}\left(1 + \frac{y_1}{b}\right)\cdot 2\frac{a^2}{x_1}\left(1 - \frac{y_1}{b}\right) \\ &= 4\frac{a^4}{x_1^2}\left(1 - \frac{y_1^2}{b^2}\right) = 4\frac{a^4}{x_1^2}\cdot\frac{x_1^2}{a^2} = 4a^2 \end{aligned}$$

となる。

補助定理 18 (六斜術)　平面上に 4 点 O, A, B, C があり、その間の距離が、$\mathrm{OA} = a,\ \mathrm{OB} = b,\ \mathrm{OC} = c,\ \mathrm{BC} = x,\ \mathrm{CA} = y,\ \mathrm{AB} = z$ と表されるとき、

$$\begin{aligned} &a^2x^2(-a^2 + b^2 + c^2 - x^2 + y^2 + z^2) + b^2y^2(a^2 - b^2 + c^2 + x^2 - y^2 + z^2) \\ &+ c^2z^2(a^2 + b^2 - c^2 + x^2 + y^2 - z^2) - (a^2b^2z^2 + b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 + x^2y^2z^2) = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。



この公式は六斜術と呼ばれ、和算でよく使われる公式である。

（証明）　4 点 OABC に対し，ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を，

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \quad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad \boldsymbol{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

とおくとき，この 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は平面内にあるので一次従属である．

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = a^2 & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a^2 + b^2 - z^2)/2 & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = (a^2 + c^2 - y^2)/2 \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = b^2 & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = (b^2 + c^2 - x^2)/2 & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} = c^2 \end{array}$$

従ってグラム行列式は 0 になるので、

$$G(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a^2 & \frac{a^2+b^2-z^2}{2} & \frac{a^2+c^2-y^2}{2} \\ \frac{a^2+b^2-z^2}{2} & b^2 & \frac{b^2+c^2-x^2}{2} \\ \frac{a^2+c^2-y^2}{2} & \frac{b^2+c^2-x^2}{2} & c^2 \end{vmatrix} = 0$$

この行列式を計算すれば、

$$
\begin{aligned}
&a^2x^2(-a^2+b^2+c^2-x^2+y^2+z^2)+b^2y^2(a^2-b^2+c^2+x^2-y^2+z^2)\\
&+c^2z^2(a^2+b^2-c^2+x^2+y^2-z^2)-(a^2b^2z^2+b^2c^2x^2+c^2a^2y^2+x^2y^2z^2)=0
\end{aligned}
$$

が得られる。

補助定理 19　半径が a, b, c の互いに外接する 3 個の円がある。これら 3 円を含むように内接する円の半径を R、これら 3 円が囲むすき間にあり 3 円と外接する円の半径を r とする。このとき、

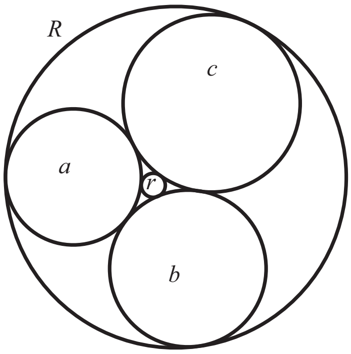
(1) $\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-2abc(a+b+c)\right)R^2+2abc(ab+bc+ca)R+a^2b^2c^2=0$

(2) $\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-2abc(a+b+c)\right)r^2-2abc(ab+bc+ca)r+a^2b^2c^2=0$

(3) $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{R}\right)^2=2\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{1}{R^2}\right)$

(4) $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{r}\right)^2=2\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{1}{r^2}\right)$

である。



デカルトの円定理と呼ばれている定理である。和算家も独立にこの定理を得ていて、『算法助術』の公式 55 である。

（証明）　半径が a, b, c, R, r の円の中心をそれぞれ $\mathrm{O}_a, \mathrm{O}_b, \mathrm{O}_c, \mathrm{O}_R, \mathrm{O}_r$ とする。

(1) については、4 点 $\mathrm{O}_a, \mathrm{O}_b, \mathrm{O}_c, \mathrm{O}_R$ について、

$$\mathrm{O}_R\mathrm{O}_a=R-a,\quad \mathrm{O}_R\mathrm{O}_b=R-b,\quad \mathrm{O}_R\mathrm{O}_c=R-c$$

$$\mathrm{O}_b\mathrm{O}_c=b+c,\quad \mathrm{O}_c\mathrm{O}_a=c+a,\quad \mathrm{O}_a\mathrm{O}_b=a+b$$

であることを利用して、六斜術（補助定理 18）を用いるとこの式が得られる。

(2) についても同様に、4 点 $\mathrm{O}_a, \mathrm{O}_b, \mathrm{O}_c, \mathrm{O}_r$ について、

$$\mathrm{O}_r\mathrm{O}_a=r+a,\quad \mathrm{O}_r\mathrm{O}_b=r+b,\quad \mathrm{O}_r\mathrm{O}_c=r+c$$

$$\mathrm{O}_b\mathrm{O}_c=b+c,\quad \mathrm{O}_c\mathrm{O}_a=c+a,\quad \mathrm{O}_a\mathrm{O}_b=a+b$$

であることを利用すればよい。

(3) については、式 (1) を $-a^2b^2c^2R^2$ で割ると、

$$-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-2\frac{a+b+c}{abc}\right)-\frac{2(ab+bc+ca)}{abcR}-\frac{1}{R^2}=0$$

となる。これを整理すると、

$$-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)-\frac{2}{R}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{1}{R^2}=0$$

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)-\frac{2}{R}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{R^2}=2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+2\frac{1}{R^2}$$

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-\frac{2}{R}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{R^2}=2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{R^2}\right)$$

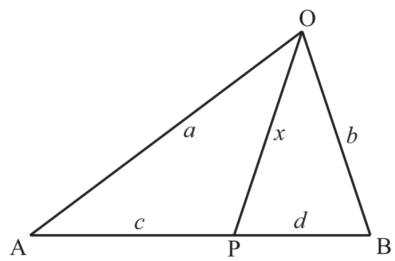
$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{R}\right)^2=2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{R^2}\right)$$

(4) についても同様である。

補助定理 20 (スチュワートの定理)　△OAB の辺 AB 上の任意の点を P とし、OA = a、OB = b、AP = c、PB = d、OP = x、とする。このとき、

$$a^2d+b^2c=(c+d)(x^2+cd)$$

が成り立つ。特に、P が AB の中点のときは、$c=d$ なので、中線定理 $a^2+b^2=2(x^2+c^2)$ となる。



（証明）　$\angle$OPA $=\theta_1$, $\angle$OPB $=\theta_2$ と置き、2 つの三角形 △OAP と △OPB の余弦定理を考える。ここで、$\cos\theta_2=\cos(180^\circ-\theta_1)=-\cos\theta_1$ であることに注意しよう。

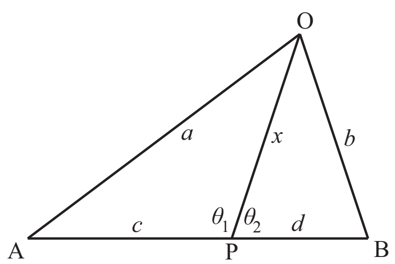


図 11: 補助定理 20

$$a^2=c^2+x^2-2cx\cos\theta_1 \tag{A.13}$$

$$b^2=d^2+x^2+2dx\cos\theta_1 \tag{A.14}$$

そこで、$(A.13)\times d+(A.14)\times c$ を計算すると、

$$a^2d+b^2c=(c+d)(x^2+cd) \tag{A.15}$$

となる。

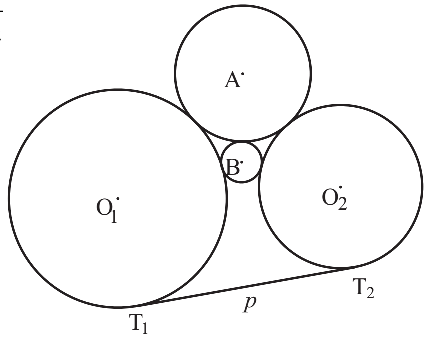
補助定理 21 (傍斜術)　図のように、2 円 A と B が外接し、その 2 円にさらに円 O_1 と円 O_2 が外接している。円 O_1 と円 O_2 の共通外接線 T_1T_2 の長さを p、4 円の O_1, O_2, A, B の半径をそれぞれ r_1, r_2, a, b とするとき、

(1)　$(a+b)^2p^4 - 16abr_1r_2p^2 - 8ab(a+b)(r_1+r_2)p^2 + 16a^2b^2(r_1-r_2)^2 = 0$

(2)　$(a+b)^2p^2 = 4(a+b+r_2)abr_1 + 8ab\sqrt{(a+b+r_1)(a+b+r_2)r_1r_2} + 4(a+b+r_1)abr_2$

(3)　$(a+b)p = 2\sqrt{(a+b+r_2)abr_1} + 2\sqrt{(a+b+r_1)abr_2}$

が成り立つ。



この補助定理は『算法助術』の公式 72 である。証明は六斜術を用いると分かりやすい。公式中のパラメータ p は、2 つの円 O_1 と O_2 がどのくらい離れているかを示しているものである。素人目には、2 円の中心間の距離 $p' = O_1O_2$ をパラメータにしてもいいのではと思ってしまうのだが、やってみると (1) より倍以上も長い式になってしまう。共通外接線の長さ p をパラメータにして簡潔な式を導いているのは、数多くの計算をこなしてきた和算家の知恵である。

（証明）　(1) を求めるため、四角形 (4 点) O_1O_2AB に六斜術を用いることにしよう。6 辺の長さを計算すると、$AO_1 = a+r_1$、$AO_2 = a+r_2$、$AB = a+b$、$O_2B = r_2+b$、$BO_1 = b+r_1$、$O_1O_2 = \sqrt{p^2+(r_1-r_2)^2}$ である。これらを補助定理 18 に代入して根気よく整理すると、(1) 式

$$(a+b)^2p^4 - 16abr_1r_2p^2 - 8ab(a+b)(r_1+r_2)p^2 + 16a^2b^2(r_1-r_2)^2 = 0 \tag{A.16}$$

がえられる。

(2) を求めるには、(1) に対して以下のような式変形を行う。

$$(a+b)^2p^4 - 8ab(2r_1r_2 + (a+b)(r_1+r_2))p^2 = -16a^2b^2(r_1-r_2)^2$$

両辺に $(a+b)^2$ をかけた後で左辺を平方完成する。

$$(a+b)^4p^4 - 8ab(a+b)^2(2r_1r_2 + (a+b)(r_1+r_2))p^2 = -16a^2b^2(a+b)^2(r_1-r_2)^2$$

$$\Big((a+b)^2p^2 - 4ab(2r_1r_2 + (a+b)(r_1+r_2))\Big)^2 = 16a^2b^2(2r_1r_2 + (a+b)(r_1+r_2))^2 - 16a^2b^2(a+b)^2(r_1-r_2)^2$$

ここで両辺の平方根をとって、

$$(a+b)^2p^2 - 4ab(2r_1r_2 + (a+b)(r_1+r_2)) = 4ab\sqrt{(2r_1r_2 + (a+b)(r_1+r_2))^2 - (a+b)^2(r_1-r_2)^2}$$

$$(a+b)^2p^2 - 4(a+b+r_2)abr_1 - 4(a+b+r_1)abr_2 = 4ab\sqrt{4(a+b+r_1)(a+b+r_2)r_1r_2}$$

従って、

$$(a+b)^2p^2 = 4(a+b+r_2)abr_1 + 8ab\sqrt{(a+b+r_1)(a+b+r_2)r_1r_2} + 4(a+b+r_1)abr_2 \tag{A.17}$$

である。

さらに両辺の平方根をとることで (3) が得られる。

$$(a+b)p = 2\sqrt{(a+b+r_2)abr_1} + 2\sqrt{(a+b+r_1)abr_2} \tag{A.18}$$

この計算の中で 2 度平方根をとっている、その際に「±」の符号がつく場合があるので、

$$(a+b)p = \left|2\sqrt{(a+b+r_2)abr_1} - 2\sqrt{(a+b+r_1)abr_2}\right|$$

となる可能性がある。しかしこれは次の図のような場合であり、題意には適していない。

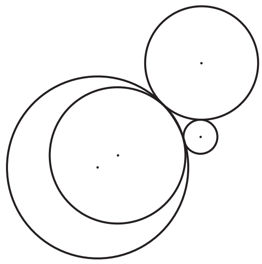
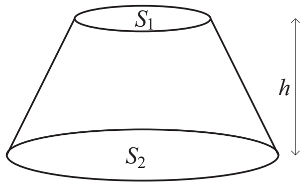


図 12: 題意に適さない例

補助定理 22　上底面の面積 S_1、下底面の面積 S_2、高さを h とする円錐台（または角錐台）の体積 V は

$$V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)h$$

である。



（証明）　角錐台の場合も同様なので、円錐台の場合を考える。図 13 のように、上底面を底面とする円錐 P の高さを h_1、体積を V_1 とする。下底面を底面とする円錐 Q の高さを h_2、体積を V_2 とする。

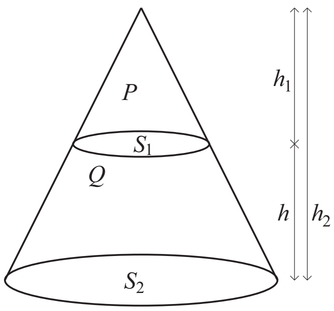


図 13: 補助定理 22

P と Q は相似であることより、

$$S_1 : S_2 = h_1^2 : h_2^2$$

なので、

$$S_1 = kh_1^2, \quad S_2 = kh_2^2 \tag{A.19}$$

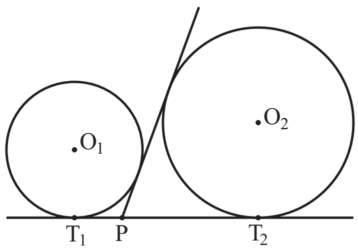
とおくことができる。従って、円錐台の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= V_2 - V_1 = \frac{1}{3}S_2h_2 - \frac{1}{3}S_1h_1 = \frac{k}{3}(h_2^3 - h_1^3) \\ &= \frac{k}{3}(h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2)(h_2 - h_1) \\ &= \frac{1}{3}(kh_1^2 + kh_1h_2 + kh_2^2)(h_2 - h_1) \\ &= \frac{1}{3}(kh_1^2 + \sqrt{kh_1^2 \cdot kh_2^2} + kh_2^2)(h_2 - h_1) \\ &= \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)h \end{aligned}$$

となる。

補助定理 23 図のように、2 円 $\mathrm{O_1}$、$\mathrm{O_2}$ の共通外接線と共通内接線がある。2 円 $\mathrm{O_1}$、$\mathrm{O_2}$ の半径を r_1, r_2 とするとき次の式が成り立つ。

$$\mathrm{PT_1} \cdot \mathrm{PT_2} = r_1r_2$$



この補助定理は『算法助術』の公式 43 の一部である。

（証明） 図より $\mathrm{PO_1} \perp \mathrm{PO_2}$ なので、$\triangle\mathrm{O_1T_1P}$ と $\triangle\mathrm{PT_2O_2}$ は相似である。従って、

$$\mathrm{O_1T_1} : \mathrm{PT_1} = \mathrm{PT_2} : \mathrm{O_2T_2}$$

より

$$\mathrm{PT_1} \cdot \mathrm{PT_2} = r_1r_2$$

が成り立つ。

補助定理 24 k, a_1, a_2, b_1, b_2 は整数とし

$$A = \sqrt{a_1\sqrt{k} + b_1}, \quad B = \sqrt{a_2\sqrt{k} + b_2}, \qquad (A > B)$$

とする。このとき、積 AB の 2 重根号がはずれ 2 つの正の整数 α, β で

$$AB = \sqrt{(a_1a_2k + b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{k}} = \sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}$$

と表すことができれば、A と B の和・差は 2 重根号を用いて

(1) $A + B = \sqrt{(a_1 + a_2)\sqrt{k} + (b_1 + b_2) + 2(\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta})}$

(2) $A - B = \sqrt{(a_1 + a_2)\sqrt{k} + (b_1 + b_2) - 2(\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta})}$

(3) $B - A = -\sqrt{(a_1 + a_2)\sqrt{k} + (b_1 + b_2) - 2(\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta})}$

と表すことができる。

（証明）

(1)　次のような計算をすればよい。

$$\begin{aligned} A+B &= \sqrt{a_1\sqrt{k}+b_1}+\sqrt{a_2\sqrt{k}+b_2} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{a_1\sqrt{k}+b_1}+\sqrt{a_2\sqrt{k}+b_2}\right)^2} \\ &= \sqrt{(a_1+a_2)\sqrt{k}+(b_1+b_2)+2\sqrt{a_1\sqrt{k}+b_1}\cdot\sqrt{a_2\sqrt{k}+b_2}} \end{aligned}$$

一般には、$A+B$ は一つの根号にまとめようとするとこのように 3 重根号となってしまうが、$AB=\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}$ の仮定を用いると

$$A+B=\sqrt{(a_1+a_2)\sqrt{k}+(b_1+b_2)+2(\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta})}$$

となり、2 重根号で表記することが可能となる。

(2)　同様に

$$A-B=\sqrt{(a_1+a_2)\sqrt{k}+(b_1+b_2)-2(\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta})}$$

である。

(3)　同様に

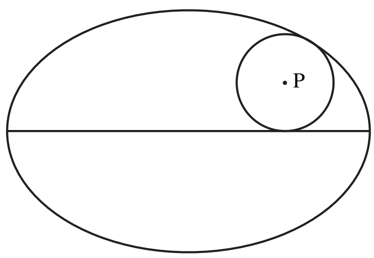
$$B-A=-(A-B)=-\sqrt{(a_1+a_2)\sqrt{k}+(b_1+b_2)-2(\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta})}$$

である。

補助定理 25　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と x 軸の両方に接する円の中心を $\mathrm{P}(p,q)$ とするとき、変数 p,q の間に関係式

$$\begin{aligned} f(p,q)= &\quad b^2p^8+2\left(2a^2-b^2\right)\left(q^2-b^2\right)p^6 \\ &+\left(b^2q^4-12a^4q^2+12a^2b^2q^2-8b^4q^2+6a^4b^2-6a^2b^4+b^6\right)p^4 \\ &-2\left(2a^2-b^2\right)\left(5b^2q^4-3a^4q^2+3a^2b^2q^2-b^4q^2+a^4b^2-a^2b^4\right)p^2 \\ &+\left(b^2-4q^2\right)\left(b^2q^2+a^4-a^2b^2\right)^2=0 \end{aligned}$$

が成り立つ。



（証明）　円の方程式を

$$(x-p)^2+(y-q)^2=q^2$$

とし、楕円と円の接点を $\mathrm{T}(s,t)$ とするとき、

$$\frac{s^2}{a^2}+\frac{t^2}{b^2}=1 \tag{A.20}$$

$$(s-p)^2+(t-q)^2=q^2 \tag{A.21}$$

が成り立つ。

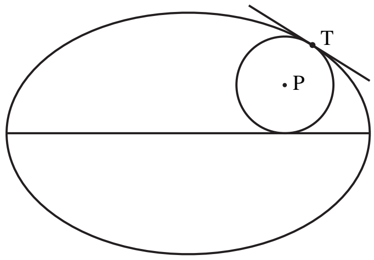


図 14: 補助定理 25

点 T における楕円の接線 l の方程式は、

$$\frac{sx}{a^2} + \frac{ty}{b^2} = 1, \qquad b^2sx + a^2ty - a^2b^2 = 0$$

で、点 P と接線 l の距離が q なので距離の公式より、

$$\frac{\left|b^2ps + a^2qt - a^2b^2\right|}{\sqrt{(b^2s)^2 + (a^2t)^2}} = q$$

分母を払って両辺を 2 乗すると、

$$\left(b^2ps + a^2qt - a^2b^2\right)^2 = q^2\left(b^4s^2 + a^4t^2\right) \tag{A.22}$$

となる。

このあとは、3 式 (A.20), (A.21), (A.22) から 2 変数 s, t を消去することで、補助定理の結果が得られる。計算は数式処理ソフトを使ってやっと計算できるほどに大変なので、ここでは省略する。下の図は楕円と点 P の軌跡をグラフにしたものである。

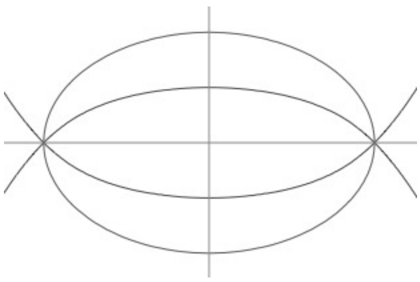


図 15: 点 P の軌跡