大成算経の病題について（２）—変題第六—

藤井康生

目 次

キーワード，和算・大成算経・病題・変式・適尽方級法

1　はじめに

大成算経巻之十六　題術辯は題として全題，病題の２題を載せている．

術として実術，権術，偏術，邪術の４術を載せている．術については京都大学数理解析研究所研究集会「数学史の研究」（2011 年）で発表した．

病題中の虚題第五については京都大学数理解析研究所共同研究「『大成算経』の数学的・歴史学的研究」（2012 年）で発表した．

変題第六加辞・易数については九州大学「第２回九州数学史シンポジウム」(2012 年）で発表した．

本稿は講演記録集に掲載した発表時に配布した資料に手を加えたものである．

本稿では，病題中の変題 第 18 − 27 問[1]より第 18 − 31 問について述べる．

大成算経後集の病題について　大成算経巻之十六　後集　題術弁に載せ病題られている病題第は，問題の与えられた条件が正しくない（不完全な）もので以下の.8 個の場合に分けている

転題　与えられた条件が足りないもの．

繁題　与えられた条件が過剰のもの．

層題　与えられた条件が不要に複雑にしているもの．例として約分をしていない，立方根にしているもの等を載せている．

反題　与えられた条件が正しくなく，答えの値は求められても，大小関係などの題意に矛盾する．

虚題　与えられた条件では方程式の解が無い，負の解になる，解が求められても題意に反するなど．答えが求められないもの．

変題　与えられた条件では２つ以上の解が求められる．

□題　方程式の係数が０になるもの．

散題　与えられた量が少数であったり，与えられた量の一方が大きく，他方が小さくその差が大きく計算が面倒なもの．

---

[1] 問題の番号は巻数ー その巻の通し番号

大成算経巻之十八　後集　病題定擬に病題の例題と一組の解を持つように条件を追加するか，条件の数値を替える方法を載せている．

2　巻之１８病題擬　変題第六加辞・易数

2.1　第 18-27

問題
等脚台形を上底と下底の中点を結ぶ線で半分にしたものがある．斜辺（外斜）は 1 尺 6 寸，対角線（内斜）は 1 尺 9 寸である．只云う右闊と左闊の和を 1 尺 8 寸とする．右闊を問う．
題中の数を用いて，右闊（右）を得る式を得る．

$3\,右^2 - 36\,右 + 105 = 0 \quad (右 - 5)(右 - 7) = 0 \quad 右 = 5 \quad 7$

右闊（右），左闊（左）各 2 件を得る．2 件とも，斜辺（外），対角線（内）より高さ（長）を求めることができる．

前　右闊 $= 5$　左闊 $= 13$

後　右闊 $= 7$　左闊 $= 11$

上記右を未知数とする傍書式を求める．

注，$外^2 = 長^2 + (左 - 右)^2$，$内^2 = 長^2 + 左^2$，$左 = 只 - 右$

$内^2 - 外^2 = (只 - 右)^2 - (只 - 2\,右)^2 = 2\,右 \times 只 - 3\,右^2$，$3\,右^2 - 2\,右 \times 只 + 内^2 - 外^2 = 0$

術　右を未知数とする．只云う数を和とする．

$左 = 和 - 右$，$左 - 右 = 和 - 2\,右 = (左 + 右) - 2\,右$

$外^2 - (左 - 右)^2 = 長^2$

$\{(左 + 右) - 2\,右\}^2 = (左 + 右)^2 - 4(左 + 右)\,右 + 4\,右^2$

$外^2 - (左 + 右)^2 = -4\,左 \times 右 + 長^2$

$外^2 = (左 - 右)^2 + 長^2$

$長^2 = 外^2 - \{(左 + 右)^2 - 4(左 + 右)\,右 + 4\,右^2\}$

$= (長^2 - 4\,左 \times 右) + (4\,左 + 4\,右)\,右 - 4\,右^2$　寄左

$内^2 - 左^2 = 長^2$

$長^2 = 内^2 - \{(左 + 右) - 右\}^2$

$= 内^2 - (左 + 右)^2 + 2(左 + 右)\,右 - 右^2$

$内^2 - (左 + 右)^2 = 長^2 - 右^2 - 2\,左 \times 右$

$長^2 = 長^2 - 右^2 - 2\,左 \times 右 + 2(左 + 右)\,右 - 右^2$

$= (長^2 - 右^2 - 2\,左 \times 右) + (2\,左 + 2\,右)\,右 - 右^2$　寄左相消

$(右^2 - 2\,左 \times 右) + (2\,左 + 2\,右)\,右 - 3\,右^2 = 0$

右を未知数とする傍書式が求められた．

この傍書式の変式を求める．

$(2\,左 - 4\,右)X - 3X^2 = 0$

注, 変式を求める（１）[2].

$f(右) = -3\,右^2 + 2\,只 \times 右 - (内^2 - 外^2)$

$f'(右) = -3 \times 2\,右 + 2\,只 = -6\,右 + 2\,右 + 2\,左 = 2\,左 - 4\,右$

$\frac{1}{2}f''(右) = -3$

$f(X + 右) = f(右) + f'(右)X + \frac{1}{2}f''(右)X^2$　,　$f(右) = 0$

$= (2\,左 - 4\,右)X - 3X^2$

注，変式を求める（２）[3].

$(右^2 - 2\,左 \times 右) + (2\,左 + 2\,右)\,右 - 3\,右^2 = 0$

$(右^2 - 2\,左 \times 右) + (2\,左 + 2\,右)x - 3x^2 = 0$　と考え，

$X = x - 右$　で割る　$(2\,左 - 4\,右)(x - 右) - 3(x - 右)^2 = 0$

$(2\,左 - 4\,右)X - 3X^2 = 0$

$$
\begin{array}{rrrl}
-3 & 2\,右 + 2\,左 & 右^2 - 左 \times 右 & \underline{\;右\;} \\
 & -3\,右 & -右^2 + 2\,左 \times 右 & \\
\hline
-3 & 2\,左 - 右 & & \\
 & -3\,右 & & \\
\cline{1-2}
-3 & 2\,左 - 4\,右 & &
\end{array}
$$

先に求めた前・後商を変式に代入し正負を視る．

前　0　正　負　$(左 = 13$　$右 = 5)$

後　0　負　負　$(左 = 11$　$右 = 7)$

[2]『明治前日本数学史第二巻』380〜381 ページに従い，微分係数を用いる．以下同様
[3]『算聖関孝和の業績』102〜103 ページに従い計算した．以下同様

加辞用旧数　問題に与えられた数値を用いるときに追加する条件
前数が求めるものであるとき．左闔が 2 倍の右闔より多い．

前　左 $-$ 2 右 $>$ 0　より 左 $>$ 2 右

後数が求めるものであるとき．左闔が 2 倍の右闔より少ない．

後　左 $-$ 2 右 $<$ 0　より 左 $<$ 2 右

　以下の 4 個の場合に変式が条件に合う商をもたないように問題に与えられた数値をかえる．

(1) f(右) $= 0$ ，f'(右) $= 0$ とするとき，重解となる．判別式 $D = 0$

(2) 変右 $=$ 変左 とするときとき，右の満極，左の干極となる

(3) 変右 $= 0$ とするとき．右の干極となる

(4) 長 $= 0$ とするとき，長の干極となる

易数無変者　変式が商をもたないように，問題に与えられた数値をかえる．

(1) 変式の方級 f'(右) $= 0$ によるとき

変式の方級（X の 1 次の項の係数）を 0 とする．

左 $= 10$ と定めると 右 $= 5$

術

2 左 $-$ 4 右 $=$ 2(左 $-$ 2 右) $= 0$　，　左 $= 10$ とすると 右 $= 5$

注　　変式の方級 $= f'$(右) $= 0$ 重解をもつ, 判別式 $D = 0$ と同じ

3 右^2 $-$ 30 右 $+$ 75 $= 0$　(右 $-$ 5)^2 $= 0$　右 $= 5$

易数有変而背者　変式が商をもつが，変商 (元の方程式の 2 番目の商) は問題の条件に背くように，問題に与えられた数値をかえる．

(2) 変式の商より，変商は，右と左が等しいとする (変右 $=$ 変左)，変商は条件に背く．

左 $= 10$ と定めると 右 $= 2$　この場合右は条件に背いている．

術　左 $= 10$　とすると，右を未知数として，変式より，

4(左 $-$ 2 右) $=$ 2 正方 $=$ 40 $-$ 8 右　寄左

左 $-$ 右 $=$ 2 正商 $= 2X =$ 10 $-$ 右

2 正商 $\times$ 負廉 $=$ 2 正方 $=$ (10 $-$ 右) $\times$ 3 $=$ 30 $-$ 3 右　寄左相消

40 $-$ 8 右 $=$ 30 $-$ 3 右　　$-$ 10 $+$ 5 右 $= 0$　上 $=$ 実　　下 $=$ 法

$右 = \dfrac{実}{法} = \dfrac{10}{5} = 2$，$右 = 2$

注　$変右 = 右 + X = 変左$　とする．$只 = 左 + 右 = 変左 + 変右 = 2\,変右$

$変右 = \dfrac{只}{2} = \dfrac{右 + 左}{2}$ ．$X = \dfrac{左 - 右}{2}$ となる

$X = \dfrac{左 - 右}{2}$ ，を変式に代入する．

$2(左 - 2\,右) - 3\dfrac{左 - 右}{2} = 0$

$4\,左 - 8\,右 - 3\,左 + 3\,右 = 0$，$左 - 5\,右 = 0$

$3\,右^2 - 24\,右 + 36 = 0$　$(右 - 2)(右 - 6) = 0$　$右 = 2$，$変右 = 6$

$変右 = 6$　このとき $只 = 12$　より $変左 = 6$ よって $変右 = 変左$

(3) 又，変式の商より，変商 (元の方程式の 2 番目の商）は，変右を 0 とする，変商は条件に背く．

$右 = 0$ のとき，直角三角形（鈎股）になる．

$左 = 10$ と定めると $右 = 20$　この場合右は条件に背いている．

術　$左 = 10$　とすると，右を未知数として，変式より

$2\,左 - 4\,右 = 負方$　$方 = -20 + 4\,右$　寄左

$右 = 負商$，$商\,(X) = -右$，$負廉 = 3$，，$負商 \times 負廉 = 右 \times 3$，　寄左相消

$-20 + 4\,右 = 3\,右$　$-20 + 右 = 0$　$右 = 20$

注　右（2 番目の商）$= X + 右 = 0$ とする．$X = -右$

$3\,右^2 - 60\,右 = 0$　$右\,(右 - 20) = 0$　$右 = 20$，0

(4) 復，長の限界（極）を考える．　長（2 番目の右による）が 0 となるとき，図形は直線となる．そのとき内斜は左闊となり，外斜は左闊と右闊の差となる．故に　$内斜 - 外斜 = 変右闊$　とする．変式の商　$X = 変右 - 真右$　となる．

$内斜 = 9$　，　$外斜 = 6$　と定めると $右 = 5$　，　$左 = 7$．

術　$内斜 = 9$　，　$外斜 = 6$　とすると，真右を未知数として，変式より，

$4\,真右 = 寄位$

$内 - 外 = 変左 - (変左 - 変右) = 変右 = 3$

$変右 + 内 = 只 = 12$　$只 - 真右 = 真左 = 12 - 真右$

$寄位 - 2\,真左 = 4\,真右 - 2\,真左 = -24 + 6\,真右 = 再寄 = 負方$

$真右-変右=-3+真右=負商 \quad 負廉=3$

$負商\times負廉=3(-3+真右)=-9+3\,真右=再寄$

$-24+6\,真右=-9+3\,真右 \quad -15+3\,真右=0 \quad 上=実 \quad 下=法$

$真右=\dfrac{実}{法}=\dfrac{15}{3}=5$

$左=2\,内-(真右+外)=18-(5+6)=7$

注

ここで，$只=変右+変左=真右+真左=12$ である．

$f(X+右)=f'(右)X+\dfrac{1}{2}f''(右)X^2=0$

$-(4\,真右-2\,真左)X-3X^2=0 \quad 変右=真右+X$

$3\,右^2-24\,右+45=0 \quad 3(右-5)(右-3)=0 \quad 右=5\ ,\ 3$

$真右=5\ ,\ 真左=7\ ,\ 変右=3\ ,\ 変左=9$

2.2 第 18-28

問題

羅と綾が併せて十五尺有る．羅の価格は三十六銭，綾の価格は六銭である．只云う，羅と綾一尺の価格の和は五銭とする．羅と綾の各一尺の価格を問う．題中の数を用いて羅の 1 尺の価格を得る式を得る．

$180-105\,羅尺価+15\,羅尺価^2=0$

$(羅尺価-3)(羅尺価-4)=0 \quad 羅尺価=3\ ,\ 4$

羅尺価	3 銭	羅	12 尺	綾尺価	2 銭	綾	3 尺
	4 銭		9 尺		1 銭		6 尺

注　羅の 1 尺の価格（羅尺価）を商とする傍書式を導く．

$羅+綾=共尺=15\,尺$

$羅\times羅尺価=羅価=36\,銭 \quad 綾\times綾尺価=綾価=6\,銭$

$只=羅尺価+綾尺価=両価=5\,銭$

$\dfrac{羅価}{羅尺価}+\dfrac{綾価}{綾尺価}=共尺$

$羅価\times綾尺価+綾価\times羅尺価=共尺\times羅尺価\times綾尺価$

$羅価\,(両価-羅尺価)+綾価\times羅尺価=共尺\times羅尺価\,(両価-羅尺価)$

$羅価\times両価+(綾価-羅価-共尺\times両価)\,羅尺価+共尺\times羅尺価^2=0$

羅尺価を未知数とする傍書式が求められた．

この傍書式の変式を求める.

$(\text{綾}\times\text{羅尺価}-\text{羅}\times\text{綾尺価})X+(\text{羅}+\text{綾})X^2=0$

注，変式を求める（１）.

$f(\text{羅尺価})=\text{羅価}\times\text{両価}+(\text{綾価}-\text{羅価}-\text{両尺}\times\text{両価})\,\text{羅尺価}+\text{共尺}\times\text{羅尺価}^2$

$f'(\text{羅尺価})=(\text{綾価}-\text{羅価}-\text{共尺}\times\text{両価})+2\,\text{共尺}\times\text{羅尺価}$

$=\text{綾}\times\text{綾尺価}-\text{羅}\times\text{羅尺価}-(\text{羅}+\text{綾})(\text{羅尺価}+\text{綾尺価})+2(\text{羅}+\text{綾})\,\text{羅尺価}$

$=\text{綾}\times\text{羅尺価}-\text{羅}\times\text{綾尺価}$

$\dfrac{1}{2}f''(\text{羅尺価})=\text{共尺}=\text{羅}+\text{綾}$

$f(X+\text{羅尺価})=f(\text{羅尺価})+f'(\text{羅尺価})X+\dfrac{1}{2}f''(\text{羅尺価})X^2 \quad , \quad f(\text{羅尺価})=0$

$=(\text{綾}\times\text{羅尺価}-\text{羅}\times\text{綾尺価})X+(\text{羅}+\text{綾})X^2$

注，変式を求める（２）.

$\text{羅}\times\text{羅尺価}\times(\text{羅尺価}+\text{綾尺価})$

$+\{\,\text{綾}\times\text{綾尺価}\text{ー}\text{羅}\times\text{羅尺価}\text{ー}\,(\text{羅}+\text{綾})\times(\text{羅尺価}+\text{綾尺価})\}\,\text{羅尺価}+(\text{羅}+\text{綾})\times\text{羅尺価}^2=0$

$\text{羅}\times\text{羅尺価}\times(\text{羅尺価}+\text{綾尺価})$

$+\{\,\text{綾}\times\text{綾尺価}\text{ー}\text{羅}\times\text{羅尺価}\text{ー}\,(\text{羅}+\text{綾})\times(\text{羅尺価}+\text{綾尺価})\}x+(\text{羅}+\text{綾})\times x^2=0$

と考え，

$X=x-\text{羅尺価}$　で割る.

$(\text{綾}\times\text{羅尺価}-\text{羅}\times\text{綾尺価})(x-\text{羅尺価})+(\text{羅}+\text{綾})(x-\text{羅尺価})^2=0$

$(\text{綾}\times\text{羅尺価}-\text{羅}\times\text{綾尺価})X+(\text{羅}+\text{綾})X^2=0$

$$
\begin{array}{lrrl}
\text{羅}+\text{綾} & \{\,\text{綾}\times\text{綾価}-\text{羅}\times\text{羅尺価}-(\text{羅}+\text{綾})(\text{羅尺価}+\text{綾尺価})\} & \text{羅}\times\text{羅尺価}\,(\text{羅尺価}+\text{綾尺価}) & \underline{\text{羅尺価}} \\
 & (\text{羅}+\text{綾})\,\text{羅尺価} & -\text{羅}\,(\text{羅尺価}+\text{綾尺価})\,\text{羅尺価} & \\
\hline
\text{羅}+\text{綾} & -\text{羅}\times\text{羅尺価}-\text{羅}\times\text{綾尺価} & 0 & \\
 & \text{羅}\times\text{羅尺価}+\text{綾}\times\text{羅尺価} & & \\
\cline{1-2}
\text{羅}+\text{綾} & \text{綾}\times\text{羅尺価}-\text{羅}\times\text{綾尺価} & &
\end{array}
$$

前・後の羅尺価・綾尺価を代入する.

前　$(3\times3-12\times2)X+(12+3)X^2=0 \quad -15X+15X^2=0 \quad 0+\text{負}\,X+\text{正}\,X^2$

後　$(6\times4-9\times1)X+(9+6)X^2=0 \quad 15X+15X^2=0 \quad 0+\text{正}\,X+\text{正}\,X^2$

加辞用旧数　問題に与えられた数値を用いるときに追加する条件
前数が求めるものであるとき，羅と綾の 1 尺の価格を掛けたものは綾と羅 1 尺の価格を掛けたものより多い．

前数が真のとき，羅 $\times$ 綾尺価 $>$ 綾 $\times$ 羅尺価 ，変式の方級 負

後数が求めるものであるとき，羅と綾の 1 尺の価格を掛けたものは綾と羅 1 尺の価格を掛けたものより少ない．

後数が真のとき，羅 $\times$ 綾尺価 $<$ 綾 $\times$ 羅尺価 ，変式の方級 正

以下 3 個の場合に変式が条件に合う商をもたないように問題に与えられた数値をかえる．

(1) f(羅尺価) $= 0$，f'(羅尺価) $= 0$ とするとき，重解となる．

(2) 変羅尺価 $=$ 変綾尺価 とするときとき，綾尺価の満極，羅尺価の于極となる

(3) 変綾尺価 $= 0$ とするとき．変綾尺価の干極となる

易数無変者　変式が商をもたないように，問題に与えられた数値をかえる．
(1) 変式が商を持たないとき．変式の方級を 0 とする，

羅 $= 6$ 尺，綾 $= 4$ 尺，羅尺価 $= 3$ 銭，と定める，方級が 0 となるとき， 綾尺価 2 銭

術　変式の方級より，

綾 $\times$ 羅尺価 $= 4 \times 3 = 12$ 正

羅 $\times$ 綾尺価 $= 6 \times$ 綾尺価 負

$$綾尺価 = \frac{綾 \times 羅尺価}{羅} = \frac{4 \times 3}{6} = 2$$

注，$90 - 60$ 羅尺価 $+ 10$ 羅尺価$^2 = 0$　羅尺価 $= 3$

易数有変而背者　変式が商をもつが，変商が問題の条件に背くように，問題に与えられた数値をかえる
(2) 変式の商より，変商は，羅尺価と綾尺価を等しくする．羅尺価の干極，綾尺価の満極のときである．変羅尺価 $=$ 変綾尺価 とすると 只 $= 2$ 変羅尺価 $= 2$ 変綾尺価

$2X =$ 真綾尺価 $-$ 真羅尺価 である．

注 $2X = 2$(変羅尺価 $-$ 真羅尺価) $= 2$ 変羅尺価 $- 2$ 真羅尺価) $=$ (真羅尺価 $+$ 真綾尺価) $- 2$ 真羅尺価

$=$ 真綾尺価 $-$ 真羅尺価

羅 $= 4$ 尺， 綾 $= 5$ 尺 ，羅尺価 $= 3$ 銭 ，と定めると，綾尺価は負になる．

術　綾尺価を未知数 x とする．

羅尺価 $-$ 綾尺価 $= 2$ 負商 (変式の商) $= 3 - x$

$2(綾 \times 羅尺価 - 羅 \times 綾尺価) = 2(5 \times 3 - 4x) = 2 \times 正方 = 寄左$

$30 - 8x = 寄左$

$羅 + 綾 = 正廉 = 4 + 5 = 9$

$正廉 \times 2 負商 = (3 - x)9 = 27 - 9x = 寄左 = 2 正方$

$30 - 8x = 27 - 9x \quad x = -3 \quad 綾尺価 = -3$

注，変式において

$$X + 羅尺価 = 変羅尺価 = 変綾尺価 = \frac{羅尺価 + 綾尺価}{2}$$

$X = \dfrac{綾尺価 - 羅尺価}{2}$ となる．

$-27 羅尺価 + 9 羅尺価^2 = 0$ ， $羅尺価 = 3$ ， 0

(3) 又，変綾尺価を 0 とする．変綾尺価 $= 0$ のとき 只 $=$ 変羅尺価 $=$ 真綾尺価 $+$ 真羅尺価

$X = 変羅尺価 - 真羅尺価 = 真綾尺価$

羅 $= 5$ 尺 ， 綾 $= 8$ 尺， 羅尺価 $= 3$ 銭と定めると，綾尺価は負になる．

術　綾尺価を未知数 x とする．

$綾尺価 \times 羅 - 綾 \times 羅尺価 = 5x - 8 \times 3 = -24 + 5x = 負方$　寄左

$綾尺価 = 正商$

$(正商) \times (正廉) = 綾尺価 \times (羅 + 綾) = 13x$　寄左相消

$-24 + 5x = 13x \quad 24 + 8x = 0 \quad x = -3$，本文 -8 とあるも不明．

注，変式において，$X = 綾尺価$

$X + 羅尺価 = 綾尺価 + 羅尺価 = 変羅尺価$

$-39 羅尺価 + 13 羅尺価^2 = 0$ ， $羅尺価 = 3$ ， 0

2.3　第 18-29

問題
大きい正方形（平方）と小さい立方体（立方）が各一個がある．面積と体積を併せると 449 寸である．只云う大きい正方形と小さい立方体の一辺の和を 2 尺 3 寸とする．大きい正方形と小さい立方体の一辺の長さを問う．
題中の数を用いて，大きい正方形の一辺（大）を得る式を得る．

$11718 - 1587 大 + 70 大^2 - 大^3 = 0$

$-(大-18)(大-21)(大-31)=0 \quad 大=18\ ,\ 21\ ,\ 31$

大きい正方形の一辺（大方）2 件，小さい立方体の一辺（小方）2 件を得る． $大=31$ は和 23 より大きいので条件に背く．

$大方=18 \quad 小方=5$

$\quad =21 \qquad =2$

注，大きいほうの正方形の一辺（大）を求める傍書式を求める．

$大^2+小^3=積=449 \quad 只=大+小=和=23$

$大^2+(和-大)^3=積$

$(和^3-積)-3\,和^2\times大+(3\,和+1)\,大^2-大^3=0$

$(大^3+3\,大^2\times小+3\,大\times小^2-大^2)$

$+(-3\,大^2-6\,大\times小-3\,小^2)\,大+(3\,大+3\,小+1)\,大^2-大^3=0$

大を未知数とする傍書式が求められた．

この傍書式の変式を求める．

$(-3\,小^2+2\,大)X+(3\,小+1)X^2-X^3=0$

注，変式を求める（１）．

$f(大)=和^3-積-3\,和^2\times大+(3\,和+1)\,大^2-大^3$

$f'(大)=-3\,和^2+2(3\,和+1)\,大-3\,大^2$

$=-3(大+小)^2+6(大+小)\,大+2\,大-3\,大^2$

$=-3\,小^2+2\,大$

$\frac{1}{2}f''(大)=(3\,和+1)-3\,大$

$=3\,大+3\,小+1-3\,大=3\,小+1$

$\frac{1}{2\times3}f'''(大)=-1$

$f(X+大)=f(大)+f'(大)X+\frac{1}{2}f''(大)X^2+\frac{1}{2\times3}f'''(大)X^3 \quad f(大)=0$

$=(-3\,小^2+2\,大)X+(3\,小+1)X^2-X^3$

注，変式を求める（２）．

$(大^3+3\,大^2\times小+3\,大\times小^2-大^2)$

$+(-3\,大^2-6\,大\times小-3\,小^2)\,大+(3\,大+3\,小+1)\,大^2-大^3=0$

$(大^3+3\,大^2\times小+3\,大\times小^2-大^2)$

$+(-3\,大^2-6\,大\times小-3\,小^2)x+(3\,大+3\,小+1)x^2-x^3=0$ と考え，

$X=x-大$ で割る，$(-3\,小^2+2\,大)(x-大)+(3\,小+1)(x-大)^2-(x-大)^3=0$

$(-3\,小^2+2\,大)X+(3\,小+1)X^2-X^3=0$

-1	$3\,大+3\,小+1$	$-3\,大^2-6\,大\times小-3\,小^2$	$大^3+3\,大^2\times小+3\,小^2\times大-大^2$	大
	$-大$	$2\,大^2+3\,大\times小+大$	$-大^3-3\,大^2\times小-3\,小^2\times大+大^2$	
-1	$2\,大+3\,小+1$	$-大^2-3\,大\times小-3\,小^2+大$	0	
	$-大$	$大^2+3\,大\times小+大$		
-1	$大+3\,小+1$	$-3\,小^2+2\,大$		
	$-大$			
-1	$3\,小+1$			

大方，小方の 2 件の値を変式に代入する．

大方 $=18$　小方 $=5$

前　$-39X+16X^2-X^3=0$　0 負 正 負

大方 $=21$　小方 $=2$

後　$30X+7X^2-X^3=0$　0 正 正 負

問題に与えられた数値を用いるときに追加する条件

加辞用旧数　前数が求めるものであるとき，二倍の大方は三倍の小方冪より少ない．

前数を真とするとき　$2\,大<3\,小^2$　方級 負

後数が求めるものであるとき，二倍の大方は三倍の小方冪より多い．

後数を真とするとき　$2\,大>3\,小^2$　方級 正

以下の 4 個の場合に変式が条件に合う商をもたないように問題に与えられた数値をかえる．

(1) $f(大)=0$，$f'(大)=0$ とするとき，重解となる．

(2) 適尽方級法により変式が商を持たない範囲を求める

3) 変大 $=$ 変小とするときとき，小の満極，大の干極となる

(4) 変小 $=0$ とするとき．小の干極となる

易数無変者　変式が商をもたないように，問題に与えられた数値をかえる．

(1) 変式の商が 1 つで，その商が条件に背くとき．

変式の商が 1 つ（元の方程式の最初の商が重解）のとき．
変式の方級を 0 とする，

$-3\,小^2+2\,大=0$

小方 $=2$ と定めると 大方 $=6$

術　$2\,大=3\,小^2$　$大=\dfrac{3\,小^2}{2}=6$

注

$-大^3+25\,大^2-192\,大+468=0$

$(大-6)^2(大-13)=0$ 大 $=6$ (重解)

$-X^3+7X^2+0X=0$ $X=7$ 大 $=13$ このとき 只 $=$ 大 $+$ 小 $=8$ より大きいので条件に背く．

(2) 変式が商を持たないとき．適尽方級法により求める．

小方 $=7$ と定めると 大方 $=13$ (変式の商が 1 つのときの極)

術 大きい方の正方形の一辺（大）を未知数とする．

$3\,小^2-2\,大=147-2\,大=負方$

$4\,負方\times負隅=4(147-2\,大)\times 1=588-8\,大=(正廉)^2=寄左$

$3\,小+1=22=正廉$　$22^2=寄左相消$

$588-8\,大-484=0$　$104-8\,大=0$　$大=13$

注　$-X^2+(3\,小+1)X+(-3\,小^2+2\,大)=0$

$-D=4(3\,小^2-2\,大)-(3\,小+1)^2=4(147-2\,大)-22^2=104-8\,大=0$　$大=\dfrac{104}{8}=13$

$-大^3+61\,大^2-1200\,大+7488=0$

$(大-13)(大-24)^2=0$ 大 $=13$

$-X^2+22X-121=0$　$(X-11)^2=0$

大 <13　変式は商をもたない．

注，大 $=13$ のとき他の商は 大 $=24$ であるが，これは 只 $=$ 大 $+$ 小 $=20$ より大きいので条件に背く．同様に変式の商 X が $X=$ 只 $-$ 大 $=$ 小 $=7$ より大きいときは条件に背く．7 より小さいときは，条件を満たしている．よって 2 組の商が求められるので，除く．

変式の商 $X<7$ のとき，元の方程式の 2 番目の商 $大+X<大+7=只$ となる場合を求める．

$-X^2+22X+(2大-147)=0$

$-(X-7)^2+8(X-7)+(2大-42)=0$ であるので，$X<7$，のとき実が正より $大>21$ となる．

よって $13<大<21$ のとき変商は条件に反する．

易数有変而背者　変式が商をもつが，変商 (元の方程式の 2 番目の商) は問題の条件に背くように，問題に与えられた数値をかえる．

(3) 変式の商より，元の方程式の商（2 番目の商）は，大きい正方形の一辺と小さい立方体の一辺を等しくするとき．(小方の満極)

$変大方=変小方$　$只=2変大方=2変小方$　$真小方-真大方=2X$（変式の商）

$小方=0.5$ と定めるとき $大方=3.8027756$ 強 (大方の干極，小方の満極)

術　大きい方の正方形の一辺（大）を未知数 x とする．

$大-小=2負商=-0.5+x$

$2負商\times負隅=-0.5+x=寄位$

$6小+2=2正廉=3+2=5$， $5+寄位=4.5+x$

$(2正廉+寄位)(2負商)=(4.5+x)(-0.5+x)=-2.25+4x+x^2=再寄$

$2x-3小^2=-0.75+2x$　$4(-0.75+2x)=再寄相消$

$-2,25+4x+x^2=-3+8x$

$-0.75+4x-x^2=0$　$x=2+\sqrt{3.25}=3.80277563773$ 強

$大<3.80277563773$ 強 のとき変商を持たない． $大>3.80277563773$ 強 のとき変商を持つ．

注 $只=大+小=2変商$，$変大=変小=変商$

$$変式の商=X=変商-大=\frac{只}{2}-大=\frac{-大+小}{2}$$

$2負商=2(-X)=大-小$

$\{-2(-X)+2(3小+1)\}(2(-X)+4(-3小^2+2大)=0$

$-\{(大-小)+(6小+2)\}(大-小)+4(-3小^2+2大)=0$

(4) 又，小さい立方体の一辺の変商 (変小方) を 0 とするとき．

$小方=10$ と定めると $大方=45$ ， $只=変大方$ ，$変大方-真大方=真小方=X$（変式の商）

術　大きい方の正方形の一辺（大）を未知数 x とする．

$3\,小 + 1 = 正廉 = 31 = 寄位$

$正商 = 小 \quad 正商 \times 負隅 = 10 \quad 寄位 - 10 = 21$

$21 \times 正商 = 負方 = 再寄 \quad 21 \times 10 = 210$

$3\,小^2 - 2x = 300 - 2x = 再寄相消$

$210 = 300 - 2x \quad 90 - 2x = 0 \quad x = 45$

$大 > 45$ のとき条件にあう変商を持たない，$大 < 45$ のとき変商を持つ．

$X = 変大 - 真大 = 只 - 大 = 小$

$\{-小 + (3\,小 + 1)\}\,小 = 3\,小^2 - 2\,大$ より大を求めている．

$Y = X - 小$ として変式の変式を作る，

$-(X - 小)^2 + (小 + 1)(X - 小) + (-小^2 + 小 + 2\,大) = 0$

$-Y^2 + (小 + 1)Y + (-小^2 + 小 + 2\,大) = 0$

変式が小より小さい商 $X < 小$ を持つとき，上記変式の変式は負の商 $Y < 0$ を持つ．実が正のときである．

$-小^2 + 小 + 2\,大 > 0$　，$小 = 10$ より

$大 > 45$ のとき条件にあう変商をもたない．

注

$-x^3 + 166x^2 - 9075x + 163350 = 0$ ， $(x - 66)(x - 55)(x - 45) = 0$

$X(-X^2 + 31X - 210) = 0$ ， $X(X - 10)(X - 21) = 0$

$Y(-Y + 11) = 0$

2.4　第 18-30

問題

四角錐台がある．その体積と高さの自乗の 3 倍を併せて 544 寸 6 分 9 厘 8 である．只云う上の面の一辺と高さの和は 1 尺 4 寸 3 分，又云う底面の一辺と高さの和は 1 尺 4 寸 9 分とする．高さを問う．
題中の数を用いて，高さを得る式を得る．

$3\,高^3 - 78.6\,高^2 + 639.57\,高 - 1634.094 = 0$

$3(10\,高 - 77)(10\,高 - 131)(5\,高 - 27) = 0 \quad 高 = 7.7\ ,\ 13.1\ ,\ 5.4$

高	上方	下方
5.4	8.9	9.5
7.7	6.6	7,2
13.1	1.2	1.8

注，高さを求める傍書式を求める．

$只 = 上 + 高 = 14.3 \quad 又 = 下 + 高 = 14.9$

$3\,積 = 高\,(上^2 + 上 \times 下 + 下^2)$

$3\,積 + 3 \times 段数\,(3) \times 高^2 = 高\,\{(只 - 高)^2 + (只 - 高)(又 - 高) + (又 - 高)^2\} + 3 \times 段数 \times 高^2$

$= (只^2 + 又^2 + 只 \times 又)\,高 + (-3\,只 - 3\,又 + 3\,段数)\,高^2 + 3\,高^3$

高を未知数とする傍書式が求められた．

この傍書式の変式

$(上^2 + 下^2 + 上 \times 下 - 3\,上 \times 高 - 3\,下 \times 高 + 6\,段数 \times 高)X$

$+(-3\,上 - 3\,下 + 3\,段数 + 3\,高)X^2 + 3X^3 = 0$

注，変式を求める（１）．

$f(高) = -積共 + (只^2 + 又^2 + 只 \times 又)\,高 + (-3\,只 - 3\,又 + 3\,段数)\,高^2 + 3\,高^3$

$f'(高) = (只^2 + 又^2 + 只 \times 又) + 2(-3\,只 - 3\,又 + 3\,段数)\,高 + 9\,高^2$

$= \{(上 + 高)^2 + (下 + 高)^2 + (上 + 高)(下 + 高)\} + 2\{-3(上 + 高) - 3(下 + 高) + 3\,段数\,\}\,高 + 9\,高^2$

$= 上^2 + 下^2 + 上 \times 下 - 3\,上 \times 高 - 3\,下 \times 高 + 6\,段数 \times 高$

$\frac{1}{2}f''(高) = (-3\,只 - 3\,又 + 3\,段数) + 9\,高$

$= -3(上 + 高) - 3(下 + 高) + 3\,段数 + 9\,高$

$= -3\,上 - 3\,下 + 3\,段数 + 3\,高$

$\frac{1}{2 \times 3}f'''(高) = 3$

$f(x + 高) = f(高) + f'(高)X + \frac{1}{2}f''(高)X^2 + \frac{1}{2 \times 3}f'''(高)X^3 \qquad f(高) = 0$

$= (上^2 + 下^2 + 上 \times 下 - 3\,上 \times 高 - 3\,下 \times 高 + 6\,段数 \times 高)X$

$+(-3\,上 - 3\,下 + 3\,段数 + 3\,高)X^2 + 3X^3$

注．変式を求める（２）．

$-\,(3\,積 + 3\,段数 \times 高^{\,2}) + \{(上 + 高)^2 + (下 + 高)^2 + (上 + 高)(下 + 高)\}\,高$

$+(-3\text{上}-3\text{下}-6\text{高}+3\text{段})\text{高}^2+3\text{高}^3=0$

$-(3\text{積}+3\text{段数}\times\text{高}^2)+\{(\text{上}+\text{高})^2+(\text{下}+\text{高})^2+(\text{上}+\text{高})(\text{下}+\text{高})\}x$

$+(-3\text{上}-3\text{下}-6\text{高}+3\text{段})x^2+3x^3=0$ と考え、

$X=x-\text{高}$ で割る．

$(\text{上}^2+\text{下}^2+\text{上}\times\text{下}+6\text{段}\times\text{高}-3\text{上}\times\text{高}-3\text{下}\times\text{高})(x-\text{高})$

$+(3\text{高}+3\text{段}-3\text{上}-3\text{下})(x-\text{高})^2+3(x-\text{高})^3=0$

$(\text{上}^2+\text{下}^2+\text{上}\times\text{下}+6\text{段}\times\text{高}-3\text{上}\times\text{高}-3\text{下}\times\text{高})X$

$+(3\text{高}+3\text{段}-3\text{上}-3\text{下})X^2+3X^3=0$

$$\begin{array}{cccc|c}
3 & -3\text{上}-3\text{下}-6\text{高}+3\text{段} & (\text{上}+\text{高})^2+(\text{下}+\text{高})^2+(\text{上}+\text{高})(\text{下}+\text{高}) & -(3\text{積}+3\text{段}\times\text{高}^2) & \text{高} \\
 & 3\text{高} & -3\text{上}\times\text{高}-3\text{下}\times\text{高}-3\text{高}^2+3\text{段}\times\text{高} & (\text{上}^2+\text{下}^2+\text{上}\times\text{下})\text{高}+3\text{段}\times\text{高}^2 & \\
\hline
3 & -3\text{上}-3\text{下}+3\text{高}+3\text{段} & \text{上}^2+\text{下}^2+\text{上}\times\text{下}-3\text{上}\times\text{高}-3\text{下}\times\text{高}+6\text{段}\times\text{高} & 0 & \\
 & 3\text{高} & & & \\
\hline
3 & -3\text{上}-3\text{下}+3\text{高}+3\text{段} & & &
\end{array}$$

高，上，下の値を変式に代入する．

前　$\text{高}=5.4$　$\text{上}=8.9$　$\text{下}=9.5$　$41.97X-29.1X^2+3X^3=0$　0 正 負 正

中　$\text{高}=7.7$　$\text{上}=6.6$　$\text{下}=7.2$　$-37.26X-9.3X^2+3X^3=0$　0 負 負 正

後　$\text{高}=13.1$　$\text{上}=1,2$　$\text{下}=1.8$　$124.7X+39.3X^2+3X^3=0$　0 正 正 正

加辞用旧数　問題に与えられた数値を用いるときに追加する条件
前数が求めるものであるとき，上下の正方形の辺の和は高さと段数を併せたものより多い．
上の正方形の辺の自乗と，下の正方形の辺の自乗，上下の正方形の辺の積，段数の 6 倍，の 4 個の和は上下の正方形の辺の和に高さを掛けたものの 3 倍より多い．

$\text{上}+\text{下}>\text{高}+\text{段}$　$\text{上}^2+\text{下}^2+\text{上}\times\text{下}+6\text{段}\times\text{高}>3(\text{上}+\text{下})\text{高}$

中数が求めるものであるとき，上の正方形の辺の自乗と，下の正方形の辺の自乗，上下の正方形の辺の積，段数の 6 倍，の 4 個の和は上下の正方形の辺の和に高さを掛けたものの 3 倍より少ない．

$\text{上}^2+\text{下}^2+\text{上}\times\text{下}+6\text{段}\times\text{高}<3(\text{上}+\text{下})\text{高}$

後数が求めるものであるとき，上下の正方形の辺の和は高さと段数を併せたものより少ない．

$\text{上}+\text{下}<\text{高}+\text{段}$

以下の 4 個の場合に変式が条件に合う商をもたないように問題に与えられた数値をかえる．

(1) $f(\text{高})=0$，$f'(\text{高})=0$　$f''(\text{高})=0$ とするとき，三重解となる．

(2) 適尽方級法により変式が商を持たない範囲を求める

(3) $\text{上方}=0$ とすると.上方の干極となる. 方錐 (四角錐) となる.変式が重解を持つとき．

(4) $\text{上方}=0$ とするとき，変式が条件に合う商を持たない範囲を考える．

易数無変者　変式が商をもたないように，問題に与えられた数値をかえる．

(1) 変式の 1 次の項の係数（方）・2 次の項の係数（廉）を 0 とする．(3 重解)（高，上，下と段数の 4 個の文字が有る．2 個を定めて，残りの 2 個の値（極）を求める．)

方 $=$ 廉 $= 0$

術　高を未知数とする，

高 $+$ 段数 $= \dfrac{\text{廉}}{3}$ の正の項 $=$ 寄左

上 $+$ 下 $= \dfrac{\text{廉}}{3}$ の負の項 $=$ 寄左相消

$(-$下 $-$ 上 $+$ 段数$)+$ 高 $= 0$

下方 $= 6.8$ ，段数 $= 3$　と定めると，1 次の項（方）と 2 次の項（廉）が 0 となる限界（極）　上方 $= 2.9$ ，高 $= 6.7$

術　上を未知数 x とする，

上 $+$ 下 $-$ 段数 $=$ 高 $= x + 6.8 - 3 = 3.8 + x$

6 段数 $\times$ 高 $+$ 上^2 $+$ 下^2 $+$ 上 $\times$ 下 $=$ 方級の正の項

$6 \times 3(3.8 + x) + x^2 + 6.8^2 + 6.8 \times x = 114.64 + 24.8x + x^2 =$ 寄左

3(上 $+$ 下) 高 $=$ 方級の負の項 $= 3(x + 6.8)(3.8 + x) = 77.52 + 31.8x + 3x^2 =$ 寄左相消

$-37.12 + 7x + 2x^2 = 0$

$\dfrac{1}{25}(10x - 29)(5x + 32) = 0$　$x = 2.9$，-6.4 ，高 $= 2.9 + 6.8 - 3 = 6.7$

(2) 又，変式が商を持たないように，3 個の文字を定めて，適尽方級法により残りの 1 個の値（極）を求める．上方 $= 0.1$ ，下方 $= 1$ ，段数 $= 3$　と定めると, 変商を持たない限界（極）　高少 $= 0.13598$ 微強 ，多 $= 15.66402$ 微弱

術　高を未知数 x とする，

6 段 $\times$ 高 $+$ 上^2 $+$ 下^2 $+$ 上 $\times$ 下 $= 6 \times 3 \times x + 0.1^2 + 1^2 + 0.1 \times 1 = 1.11 + 18x$

(6 段 $\times$ 高 $+$ 上^2 $+$ 下^2 $+$ 上 $\times$ 下$)-3($上 $+$ 下) 高 $=$ 正方　4 正方 $\times \dfrac{\text{正隅}}{3} = \dfrac{\text{正廉}^2}{3}$

$1,11 + 18x - 3 \times 1.1 \times x = 1.11 + 14.7 \times x$

4 正方 $\times \dfrac{\text{正隅}}{3} = 4.44 + 58.8 \times x =$ 寄左

$\dfrac{\text{正廉}}{3} =$ 高 $+$ 段数 $-$ (上 $+$ 下$) = 3 - 1.1 + x = 1.9 + x$

$3(\dfrac{\text{正廉}}{3})^2 = \dfrac{\text{正廉}^2}{3} = 3(1.9 + x)^2 = 10.83 + 11.4x + 3x^2 =$ 寄左相消

$6.39 - 47.4x + 3x^2 = 0$　$x = 0.135980422487$ 微強 ，$x = 15.6640195775$ 微弱

0.135980422487 微強 $< x < 15.6640195775$ 微弱　のとき商を持たない．

$x < 0.135980422487$ 微強 ，15.6640195775 微弱 $< x$　のとき商を持つ．

易数有変而背者　変式が商をもつが，変商 (元の方程式の 2 番目の商) は問題の条件に背くように，問題に与えられた数値をかえる．

(3) 変式の商による，元の方程式の商は上方が 0 となるとき．そのとき四角錐（方錐）になる．変式はその商のみを持つ（重解）．只云う数は変高となる．只 $=$ 変高 ， 変高 $-$ 真高 $=$ 真上 $= X$．下方，段数，上方の 3 個から，廉によって高 1 個を求める．
高を未知数とする，

$$(上+下)-(高+段数)=(上+下-段数)-高=寄左=\frac{負廉}{3}$$

$$上=正商 \quad 上\times\frac{正隅}{3}=上 \quad 2\,上=寄左 \quad （注）\ 高=下-(上+段数)$$

注，変式の商は重解なので負廉は正商の 2 倍である．

下方 $= 12$ ， 段数 $= 3$ と定めると 上方 $= 3$ ， 高 $= 6$

術， 上を未知数 x とする，

上 $(x) =$ 方級正商 (変式の商 X)　2 正商 $\times$ 負隅 $=$ 負廉 $= 6x =$ 寄位

下 $-$ (上 $+$ 段数) $=$ 高 $= 9 - x$

$$6\,段数\times高+下^2+上^2+上\times下-3(上+下)\,高=18(9-x)+12^2+x^2+12x-3(x+12)(9-x)$$

$$=-18+3x+4x^2=再寄$$

$$寄位-正商\times正隅=6x-3x=3x$$

$$3\,上\times正商=3x^2=再寄$$

$$18-3x-x^2=0 \quad (x+6)(x-3)=0 \quad x=3 \quad 高=下-(上+段)=12-(3+3)=6$$

注，この時，元の方程式

$3(高^3-24\,高^2+189\,高-486)=0$，$3(高-6)(高-9)^2=0$, の商，高 $=6$，9(この時，上 $=0$，重解)

変式 $3(X^2-6X+9)=0$，$3(X-3)^2=0$ の商, $X=3=$ 上，重解である．

(4) 又，前と同様に変式の商による，元の方程式の商は上方が 0 となるとき．
変式はその商のみを持つ．(変式の商は上と 0）下方，段数，上方の 3 個から，廉によって高 1 個を求める．
変式の方級を 0，廉級を正商（上方）とする．方級 $= 0$　廉級 $=$ 商
術　高を未知数とする，

$$(上+下)-(高+段数)=(上+下-段数)-高=\frac{正廉}{3}=寄左$$

$$上方=正商 \quad 上\times\frac{正隅}{3}=上 \quad 上+下-段数-高=上$$

$$-下+段数+高=0$$

下方 $= 10$ ， 段数 $= 3$ と定めると，変上方少 $= 1.725083$ 弱　多 $= 9.274917$ 強　高 $= 7$

術　上を未知数 x とする，

上^2 + 下^2 + 上 × 下 = 寄位　$x^2 + 10^2 + 10 \times x = 100 + 10x + x^2$

下 − 段数 = 高 $= 7$　6 段数 × 高 $= 18 \times 7 = 126$

6 段数 × 高 + 寄位 $= 226 + 10x + x^2 =$ 再寄

3(上 + 下) 高 = 3(上 + 10) × 7 $= 210 + 21x =$ 再寄相消

$16 - 11x + x^2 = 0$

上少 $= 1.72508278$ 弱　多 $= 9.274917217$ 強

1.72508278 弱 < 上 < 9.274917217 強　この時，変商を持たない．

上 < 1.72508278 弱 ， 9.274917217 強 < 上　この時，変商を持つ．

注，変式の $\frac{\text{負廉}}{\text{隅}}$ は上より，方が負で有れば変式の正の商は上より大きくなり条件に反する．

2.5　第 18-31

問題
直方体がある．体積は 24 寸である．只云う横と高さを掛けた数に縦を併せて 10 寸，又云う横と高さの和を 5 寸とする．高さを問う．
題中の数を用いて，高さ（高）を得る式を得る．

24 − 50 高 + 35 高^2 − 10 高^3 + 高^4 $= 0$

(高 − 1)(高 − 2)(高 − 3)(高 − 4) $= 0$　　高 = 1 , 2 , 3 , 4

高	横	縦
1	4	6
2	3	4
3	2	4
4	1	6

注，高を求める傍書式を求める．

只 = 横 × 高 + 縦 $= 10$　又 = 横 + 高 $= 5$　積 = 横 × 高 × 縦　横 = 又 − 高

縦 = 只 − 横 × 高 = 只 − (又 − 高) 高 = 只 − 又 × 高 + 高^2

高 (又 − 高)(只 − 又 × 高 + 高^2) − 積 $= 0$

−(又 × 高 − 高^2)^2 + 只 × 高 × 又 − 只 × 高^2 − 積 $= 0$

積 − 只 × 又 × 高 + (又^2 + 只) 高^2 − 2 又 × 高^3 + 高^4 $= 0$

高を未知数とする傍書式が求められた．

傍書式の変式　.

$(横^2 \times 高 + 縦 \times 高 - 横 \times 高^2 - 横 \times 縦)X + (横^2 + 高^2 + 縦 - 3\,横 \times 高)X^2$

$+(2\,高 - 2\,横)X^3 + X^4 = 0$

　注，変式を求める（１）.

$f(高) = 積 - 只 \times 又 \times 高 + (又^2 + 只)\,高^2 - 2\,又 \times 高^3 + 高^4$

$= 積 - (横^2 \times 高 + 横 \times 縦 + 横 \times 高^2 + 縦 \times 高)\,高 + (横^2 + 3\,横 \times 高 + 高^2 + 縦)\,高^2$

$-2(横 + 高)\,高^3 + 高^4$

$f'(高) = -只 \times 又 + 2(又^2 + 只)\,高 - 2\,又 \times 只 \times 高 - 2 \times 3\,又 \times 高^2 + 4\,高^3$

$= -(横 \times 高 + 縦)(横 + 高) + 2\{(横 + 高)^2 + (横 \times 高 + 縦)\}\,高 - 6(横 + 高)\,高^2 + 4\,高^3$

$= 横^2 \times 高 - 横 \times 高^2 - 縦 \times 横 + 縦 \times 高$

$\frac{1}{2}f''(高) = (又^2 + 只) - 2 \times 3\,又 \times 高 + 2 \times 3\,高^2$

$= (横 + 高)^2 + (横 \times 高 + 縦) - 6(横 + 高)\,高 + 6\,高^2$

$= 横^2 - 3\,横 \times 高 + 高^2 + 縦$

$\frac{1}{2 \times 3}f'''(高) = -2\,又 + 4\,高$

$= -2\,横 + 2\,高$

$\frac{1}{4!}f^{(4)}(高) = 1$

$f(X + 高) = f(高) + f'(高)X + \frac{1}{2}f'(高)X^2 + \frac{1}{2 \times 3}f'''(高)X^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(高)X^4$

$= (横^2 \times 高 + 縦 \times 高 - 横 \times 高^2 - 横 \times 縦)X + (横^2 + 高^2 + 縦 - 3\,横 \times 高)X^2$

$+(2\,高 - 2\,横)X^3 + X^4$

注，変式を求める（２）.

$積 - (横^2 \times 高 + 横 \times 縦 + 横 \times 高^2 + 縦 \times 高)\,高$

$+(横^2 + 3\,横 \times 高 + 高^2 + 縦)\,高^2 - 2(横 + 高)\,高^3 + 高^4 = 0$

$積 - (横^2 \times 高 + 横 \times 縦 + 横 \times 高^2 + 縦 \times 高)x$

$+(横^2 + 3\,横 \times 高 + 高^2 + 縦)\,高^2 - 2(横 + 高)x^3 + x^4 = 0$　と考え，

$X = x - 高$　で割る

$(横^2 \times 高 + 縦 \times 高 - 横 \times 高^2 - 横 \times 縦)(x - 高) + (横^2 + 高^2 + 縦 - 3\,横 \times 高)(x - 高)^2$

$+(2\,高 - 2\,横)(x - 高)^3 + (x - 高)^4 = 0$

$(横^2 \times 高 + 縦 \times 高 - 横 \times 高^2 - 横 \times 縦)X + (横^2 + 高^2 + 縦 - 3\,横 \times 高)X^2$

$+(2\,高 - 2\,横)X^3 + X^4 = 0$

高さ，横，縦各 4 件の値を変式に代入する．

	高	横	縦	実	方	上廉	下廉	隅	
第 1	1	4	6	0	負	正	負	正	$-6x+11x^2-6x^3+x^4$
第 2	2	3	4	0	正	負	負	正	$2x-x^2-2x^3+x^4$
第 3	3	2	4	0	負	負	正	正	$-2x-x^2+2x^3+x^4$
第 4	4	1	6	0	正	正	正	正	$6x+11x^2+6x^3+x^4$

加辞用旧数　問題に与えられた数値を用いるときに追加する条件
第一数が求めるものであるとき，横が高さより多く，横の 2 乗，高さの 2 乗，縦の 3 個を併せたものは 3 倍の横と高さを掛けたものより多い．

横 $>$ 高　下廉負　横$^2+$高$^2+$縦 >3 横 $\times$ 高　上廉正

第二数が求めるものであるとき，横が高さより多く，横の 2 乗，高さの 2 乗，縦の 3 個を併せたものは 3 倍の横と高さを掛けたものより少ない．

横 $>$ 高　下廉負　横$^2+$高$^2+$縦 <3 横 $\times$ 高　上廉負

第三数が求めるものであるとき，横が高さより少なく，横の 2 乗，高さの 2 乗，縦の 3 個を併せたものは 3 倍の横と高さを掛けたものより少ない．

横 $<$ 高　下廉正　横$^2+$高$^2+$縦 <3 横 $\times$ 高　上廉負

第四数が求めるものであるとき，横が高さより少なく，横の 2 乗，高さの 2 乗，縦の 3 個を併せたものは 3 倍の横と高さを掛けたものより多い．

横 $<$ 高　下廉正　横$^2+$高$^2+$縦 >3 横 $\times$ 高　上廉正

易数無変者　変式が商をもたないように，問題に与えられた数値をかえる．
　変式が商を持たないとき．元の方程式の商は 4 個ある中で，3 個の商が求められない場合.（4 重解）．方，上廉，下廉を 0 とする．

高 $=4$ と定めるとき　方 $=0$，上廉 $=0$，下廉 $=0$ より 横 $=4$，縦 $=16$

術　下廉$/2=\dfrac{1}{2}(2$ 高 -2 横$)=0$　高 $=$ 横，高 $=4$，横 $=4$

上廉 $=$ 横$^2+$高$^2+$縦 -3 横 $\times$ 高 $=0$

縦 $=3$ 横 $\times$ 高 $-$ (横$^2+$高^2) $=3\times4\times4-(4^2+4^2)=16$

方級 $=$ 横$^2\times$ 高 $+$ 縦 $\times$ 高 $-$ 横 $\times$ 高$^2-$ 横 $\times$ 縦 $=4^2\times4+16\times4-4\times4^2-4\times16=0$

注．下廉より 高 $=$ 横，上廉より 縦 $=3$ 横 $\times$ 高 $-$ (横$^2+$高^2) $=$ 横^2

方 $=$ 横$^2\times$ 高 $+$ 縦 $\times$ 高 $-$ 横 $\times$ 高$^2-$ 横 $\times$ 縦 $=$ 横$^3+$横$^3-$横$^3-$横$^3=0$

$x=4$（4 重解）

又，変式の方を 0 とし，残りに対して平方適尽方級法を用いる．

4 隅 $\times$ 上廉 $-$ 下廉$^2=4($横$^2+$高$^2+$縦 -3 横 $\times$ 高$)-4($高 $-$ 横$)^2=4($縦 $-$ 横 $\times$ 高$)$

このとき，0 となるので，先の場合と同様になる．一般には 0 にならない．
変式が商をもつが，変商は問題の条件に背くように，問題に与えられた数値をかえる．方・上廉・下廉 3 個を同時に 0 にできる．

易数有変而背者　変式の商による，元の方程式の変商は横と縦が等しくなるとき.（変横=変縦）
縦，横，高さが有る．方級負商（変式の商）を未知数 x とする．

$横+x=変横=変縦\quad 只=横\times高+縦$

$変横=横+x\quad 変縦=横+x\quad 高-x=変高$（$又=変横+変高=横+高$）

$只=変横\times変高+変縦=(横+x)(高-x)+(横+x)$

$=(横\times高+横)+(-横+高+1)x-x^2=寄左$

$横\times高+縦=只=寄左相消$

$-横+縦+(横-高-1)x+x^2=0$　始式

$下廉一次数=変式正下廉-正隅\times負商=2高-2横-x$

$上廉一次数=正上廉-下廉一次数\times負商$

$=正上廉-(正下廉-正隅\times負商)負商$

$=横^2+高^2+縦-3横\times高+(-2高+2横)x+x^2$

$正方-(上廉一次数)\times負商$

$(横\times高^2+横\times縦-横^2\times高-縦\times高)+(横^2+高^2+縦-3横\times高)x$

$+(2横-2高)x^2+x^3=0$　中式

傍書式の変式は 負商 $(-x)$ を持つように中式を求める

$正方-(正上廉-(正下廉-正隅\times負商)負商)負商=0$

注、中式の変式を作る．

$(横\times高^2+横\times縦-横^2\times高-縦\times高)X$

$+(横^2+高^2+縦-3横\times高)X^2+(2横-2高)X^3+X^4=0$

$X-x=Y$

$(横\times高^2+横\times縦-横^2\times高-縦\times高)\}Y$

$\{3x^2+2(2横-2高)x+(横^2+高^2+縦-3横\times高)\}Y^2+\{3x+(2横-2高)\}Y^3+Y^4=0$

正隅	正下廉	正上廉	正方	-商 (負商)
	$-隅\times商$	$-下廉一次数\times商$	$-上廉一次数\times商$	
隅	下廉一次数	$上廉-下廉一次数\times商$	$正方-上廉一次数=0$	

$下廉一次数=正下廉-隅\times商=2横-2高-x$

上廉一次数 $=$ 正上廉 $-$ 下廉一次数 $\times$ 商 $=$ 横^2 $+$ 高^2 -3 横 $\times$ 高 $+$ $(2$ 横 -2 高$)x + x^2$

正方 $-$ 上廉一次数 $\times$ 商 $= 0$

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{正隅} & \text{下廉一次数} & \text{上廉一次数} & \text{正方} & \underline{-\text{商}\ (\text{負商})} \\
 & -\text{隅}\times\text{商} & -\text{下廉二次数}\times\text{商} & -\text{上廉二次数}\times\text{商} & \\
\hline
\text{隅} & \text{下廉二次数} & \text{上廉二次数} & 0 & \\
 & -\text{隅}\times\text{商} & & & \\
\cline{1-3}
\text{隅} & \text{下廉三次数} & & &
\end{array}
$$

注，本文には変式の隅，下廉，上廉を求める計算の結果が載せられている．

(下廉二次数) $=$ (下廉一次数) $-$ 正隅 $\times$ 負商 $= (x + 2$ 横 -2 高$) - 1 \times (-x) = 2x + 2$ 横 -2 高

(上廉二次数) $=$ (上廉一次数) $-$ (下廉二次数) $\times$ 負商

$= \{x^2 + (2$ 横 -2 高$)x + ($横$^2 +$ 高$^2 +$ 縦 -3 横 $\times$ 高$)\} - \{2x + (2$ 横 -2 高$)\}(-x)$

$= 3x^2 + 2(2$ 横 -2 高$)x + ($横$^2 +$ 高$^2 +$ 縦 -3 横 $\times$ 高$)$　変式の変式の上廉

(下廉三次数) $=$ (下廉二次数) $-$ 正隅 $\times$ 負商 $= (2x + 2$ 横 -2 高$) - 1 \times (-x) = 3x + 2$ 横 -2 高

これは変式の変式の下廉

$-$方 $x +$ 上廉 $x^2 -$ 下廉 $x^3 +$ 隅 $x^4 = 0$

$\{$ 上廉 $-$ (下廉 $-$ 隅 $x)x\}x =$ 方

4 隅 $\times$ 上廉 $=$ (下廉$)^2$

4 隅 $\times$ 上廉 $= (4$ 横$^2 + 4$ 高$^2 + 4$ 縦 -12 横 $\times$ 高$) + (16$ 横 -16 高$)x + 12x^2$

(下廉$)^2 = (4$ 高$^2 - 8$ 高 $\times$ 横 $+ 4$ 横$^2) + (12$ 横 -12 高$)x + 9x^2$

$(4$ 縦 -4 横 $\times$ 高$) + (4$ 横 -4 高$)x + 3x^2 = 0$　　後式

(後式) -3(始式)

(縦 $+3$ 横 -4 横 $\times$ 高$) + ($横 $-$ 高 $+3)x = 0$　　一式

(一式)$x +$ (横 $-$ 高 -1)(後式) $-$ $(4$ 横 -4 高$)$(始式)

$(4$ 横 $\times$ 高$^2 + 4$ 横$^2 - 4$ 横$^2 \times$ 高 -4 縦$) + ($縦 $+3$ 横 -4 横 $\times$ 高$)x = 0$　　二式

(一式)，(二式) より

(縦 $+3$ 横 -4 横 $\times$ 高$)^2 - ($横 $-$ 高 $+3)(4$ 横 $\times$ 高$^2 + 4$ 横$^2 - 4$ 横$^2 \times$ 高 -4 縦$) = 0$

4 横$^3 \times$ 高 $+ 8$ 横$^2 \times$ 高$^2 + 4$ 横 $\times$ 高$^3 + 10$ 縦 $\times$ 横 $+$ 縦$^2 + 12$ 縦 $=$ 寄左

4 横$^3 + 8$ 横$^2 \times$ 高 $+ 12$ 横 $\times$ 高$^2 + 8$ 縦 $\times$ 横 $\times$ 高 $+ 3$ 横$^2 + 4$ 縦 $\times$ 高 $=$ 寄左相消

$(横\times 高^2+横\times 縦-横^2\times 高-縦\times 高)+(横^2+高^2+縦-3\,横\times 高)x$

$+(2\,横-2\,高)x^2+x^3=0$　中式

$(中式)-(始式)x$

$(横\times 高^2+横\times 縦-横^2\times 高-縦\times 高)+(横^2+高^2+横-3\,横\times 高)x+(横-高+1)x^2=0$

$(上式)-(横-高+1)(始式)$

$(横\times 高^2+横^2+横-横^2\times 高-横\times 高-縦)+(横+1-横\times 高)x=0$　一式

$(一式)x-(横-横\times 高+1)(始式)$

$-(-横^2-横+横^2\times 高+横\times 縦+縦-横\times 縦\times 高)+(横-横\times 高-縦+高+1)x=0$

$(上式)-(一式)$

$(高\times 横\times 縦+高\times 横-横\times 高^2-横\times 縦)+(高-縦)x=0$　二式

$(横\times 高^2+横^2+横-横^2\times 高-横\times 高-縦)(高-縦)$

$-(高\times 横\times 縦+高\times 横-横\times 高^2-横\times 縦)(横+1-横\times 高)=0$

$横^2\times 高^3+縦\times 横^2\times 高+縦\times 横\times 高^2+縦\times 高=寄左$

$縦\times 横^2\times 高^2+横^2\times 高^2+横\times 高^3+縦^2=寄左相消$

横、高さが有る．縦を未知数とする．

$4\,横^3\times 高+8\,横^2\times 高^2+4\,横\times 高^3)+(10\,横+12)\,縦+縦^2=寄左$

$(4\,横^3+8\,横^2\times 高+12\,横\times 高^2+3\,横^2)+(8\,横\times 高+4\,高)\,縦=寄左相消$

$(4\,横^3\times 高+8\,横^2\times 高^2+4\,横\times 高^3-3\,横^2+4\,横^3-8\,横^2\times 高-12\,横\times 高^2)$

$+(10\,横+12-8\,横\times 高-4\,高)\,縦+縦^2=0$　前式

$横^2\times 高^3+(横^2\times 高+横\times 高^2+高)\,縦=寄左$

$(横^2\times 高^2+横\times 高^3)+横^2\times 高^2\times 縦+縦^2=寄左相消$

$(横^2\times 高^2+横\times 高^3-横^2\times 高^3)+(横^2\times 高^2-横^2\times 高-横\times 高^2-高)\,縦+縦^2=0$　後式

(前式)-(後式)

$4\,横^3\times 高+横^2\times 高^3+7\,横^2\times 高^2+3\,横\times 高^3+4\,横^3+8\,横^2\times 高-12\,横\times 高^2-3\,横^2)$

$+(横^2\times 高+横\times 高^2+10\,横+12-横^2\times 高^2-8\,横\times 高-3\,高)\,縦=0$　一式

$縦\,(一式)+(後式の中級)(前式)-(前式の中級)(後式)$

$= 縦 \times (一式) + (横^2 \times 高^2 - 横^2 \times 高 - 横 \times 高^2 - 高)(前式) - (10\,横 + 12 - 8\,横 \times 高 - 4\,高)(後式)$

$(4\,横^4 \times 高^3 - 8\,横^4 \times 高^2 + 4\,横^4 \times 高 + 8\,横^3 \times 高^4 - 20\,横^3 \times 高^3 + 9\,横^3 \times 高^2 + 3\,横^3 \times 高$

$+4\,横^2 \times 高^5 - 32\,横^2 \times 高^4 + 38\,横^2 \times 高^3 - 11\,横^2 \times 高^2 + 4\,横^2 \times 高 - 4\,横 \times 高^5 + 16\,横 \times 高^4$

$-2\,横 \times 高^3 - 4\,横 \times 高^2 + 3\,横 \times 高)$

$+(4\,横^2 \times 高 - 4\,横^2 + 横 \times 高^3 + 7\,横 \times 高^2 - 8\,横 \times 高 - 3\,横 + 3\,高^3 - 12\,高^2)\,縦 = 0$　二式

$(二式方)(一式実) - (二式実)(一式方)$

以下は術と同じ．
高若干を定めるとき，横と縦が等しいとき，横若干，縦若干を得る．
術

$4\,横^3 \times 高^7 + 8\,高^6 \times 横^4 + 4\,高^5 \times 横^5 + 4\,高^7 \times 横 + 85\,高^6 \times 横^2 + 154\,高^3 \times 横^3$

$+69\,高^4 \times 横^4 + 12\,高^3 \times 横^5 + 44\,高^5 \times 横 + 534\,高^4 \times 横^2 + 260\,高^3 \times 横^3 + 125\,高^2 \times 横^4$

$+24\,高^5 + 110$(本文 160 は誤り）$高^4 \times 横 + 158\,高^2 \times 横^2 + 12\,高^3 + 280\,高^2 \times 横 + 57\,高^2$

$+16\,横^4(*) + 24\,横^3(*) + 9\,横^2(*) = 寄左$　21 位

本文 $(*)$ の 3 項は負の方に載せられている．

$8\,高^7 \times 横^2 + 44\,高^6 \times 横^3 + 32\,高^5 \times 横^4 + 12\,高^4 \times 横^5 + 30\,高^6 \times 横 + 314\,高^5 \times 横$

$+278\,高^4 \times 横^3 + 114\,高^3 \times 横^4 + 4\,高^2 \times 横^5 + 3\,高^6 + 436\,高^3 \times 横^2 + 82\,高^2 \times 横^3$

$+72\,高 \times 横^4 + 54\,高^4 + 330\,高^3 \times 横 + 38\,高 \times 横^3 + 28\,高 \times 横^2$

$+78\,高 \times 横 + 36\,高 = 寄左相消$　19 位

注，最後に述べているのは，$変横 = 変縦$ とする．$変縦 = 横 + x$
又云う数より $変高 = 高 - x$ を求める．
只云う数より，縦, 横, 高, を用いて始式を求める．
変式が負商を持つように中式を求める．
中式の変式に適尽方級法を用いて，後式を求める．
始式・後式，始式・中式より．x を消去する．
縦を未知数とする前式・後式を求める．
前式・後式より縦を消去して，高を与えて横を未知数とする方程式を求める．

参考文献

[1] 柏原信一郎「『大成算経』巻之十六　題術辯について」数学史の研究，数理解析研究所講究録 1444，2005 年

[2] 小松彦三郎「「大成算経」校訂本作成の現状報告」数学史の研究，数理解析研究所講究録 1546，2007 年

[3] 小松彦三郎「大成算経 (小松校訂本, その 1)」数理解析研究所講究録 1858，20013 年
小松彦三郎「大成算経 (小松校訂本年, その 2)」数理解析研究所講究録 2024，20017 年
小松彦三郎「大成算経 (小松校訂本, その 3)」数理解析研究所講究録 2025，20017 年
小松彦三郎「大成算経 (小松校訂本, その４)」数理解析研究所講究録 2026，20017 年

[4] 藤井康生「大成算経巻之十六（權術）について」, 数学史の研究, 数理解析研究所講究録 1787，2012 年

[5] 藤井康生「大成算経の病題について（１）ー虚題第五についてー」『大成算経』の数学的・歴史学的研究, 数理解析研究所講究録 1831，2013 年

[6] 藤井康生「大成算経の病題について（２）ー変題第六ー」
第 2 回九州数学史シンポジュウム講演記録集

[7] 日本学士院編『明治前日本数学史第二巻』井上書店，1979 年

[8] 加藤平左エ門『算聖関孝和の業績』槙書店，1972 年