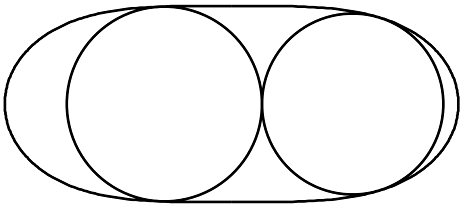
4.15　吉田茂兵衛

【問題文】

（右）



図のように、類楕円内に大小 2 個の円がある。類楕円の長径、短径、大円の直径の長さが与えられたとき、小円の直径の長さを求めよ。

【現代解】

算額中に類楕円とは「側円ではなく立環を切ったもの」とある。和算では楕円のことを「側円」と呼んでいる。また「立環」とはトーラス（図 27）のことなので、類楕円はトーラスの切断面である。

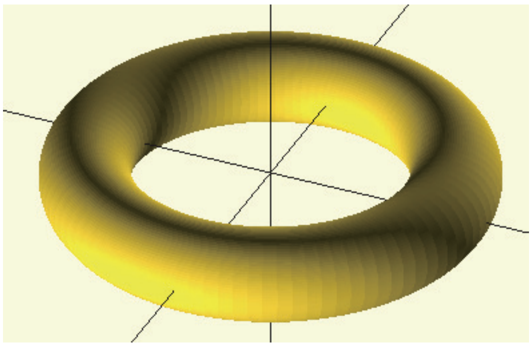


図 27: トーラス

トーラスの切断面にもさまざまあるが、トーラスの回転軸と平行な切断面で切ると対称性がよい。『算法楕円解』によれば、トーラスを回転軸の上方から見た、図 28 において、直線 l（トーラスの幅 AB の中点を通り AB と垂直な直線）の位置の切断面で切ったものを「類楕円」または「環楕円」と和算では呼んでいる。また、直線 m の位置の切断面で切ったものは「尖楕円」と呼び、その他の直線の位置の切断面で切ったものを「環偏楕円」と呼んでいる。

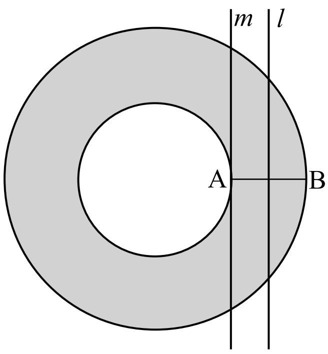


図 28: トーラスの切断面

図 29 では類楕円と通常の楕円の形状を比較してみた。類楕円の長軸の先端は楕円のようには尖ってはおらず、丸みをおびていることが分かる。

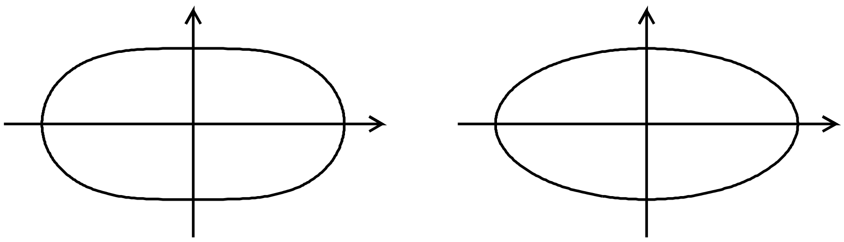


図 29: 類楕円（左）と楕円（右）

図 30 を用いて、類楕円の方程式を求めるところから始めることにする。左側の図はトーラスを作るための回転円と回転軸を表している。回転円の半径が b で、回転円の中心から回転軸までの距離が d である。中央の図はトーラスを回転軸の上方から見た図である。右側の図は切断面としての類楕円である。類楕円の短軸が $2b$ となるためには、左側の図において回転円の半径が b でなければならない。類楕円の長軸が $2a$ となるためには、中央の図において、切断面を表す直線が円によって切り取られる部分の長さが $2a$ でなければならない。従って、3 辺 $a,\ d,\ b+d$ からなる直角三角形に三平方の定理を用いると、

$$d = \frac{a^2 - b^2}{2b} \tag{1}$$

である。

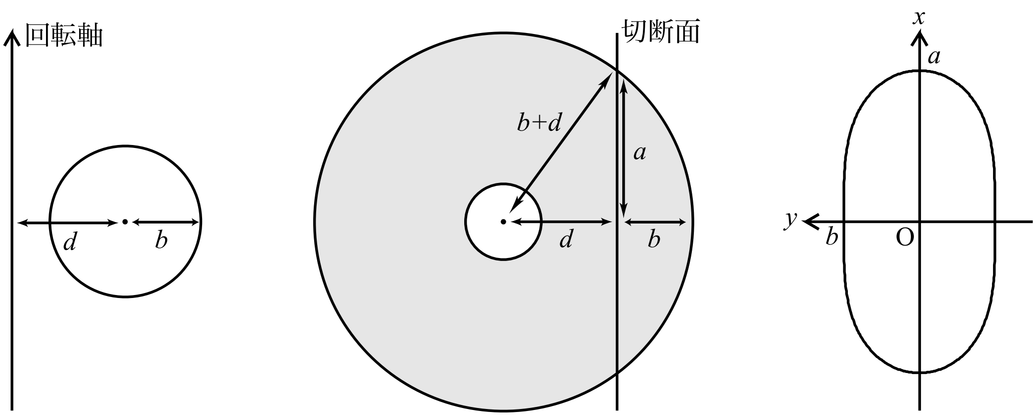


図 30: d を求める

次に、図 31 の左の図の点 A について考えることにしよう。回転円の中心を通る水平方向の軸とのなす角を θ とする。このとき $\mathrm{AB} = d + b\cos\theta$、$\mathrm{AH} = b\sin\theta$ である。この点 A は中央の図では点 A_1 にあたる。点 A_1 を回転軸の周りを回転させ、切断面にぶつかったところが点 A_2 である。このとき、$\mathrm{A}_2\mathrm{H}_2 = \sqrt{(d + b\cos\theta)^2 - d^2} = \sqrt{2bd\cos\theta + b^2\cos^2\theta} = \sqrt{(a^2 - b^2)\cos\theta + b^2\cos^2\theta}$ である。右側の図で点 A_2 に対応するものが点 A_3 であり、その座標は $(\sqrt{(a^2 - b^2)\cos\theta + b^2\cos^2\theta},\ b\sin\theta)$ である。以上より類楕円のパラメータ表示は

$$\begin{cases} x = \sqrt{(a^2 - b^2)\cos\theta + b^2\cos^2\theta} \\ y = b\sin\theta \end{cases} \tag{2}$$

である。この式から $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を利用して、$\sin\theta,\ \cos\theta$ を消去すると、類楕円の方程式

$$b^2(x^2 + y^2 - b^2)^2 + (a^2 - b^2)^2(y^2 - b^2) = 0 \tag{3}$$

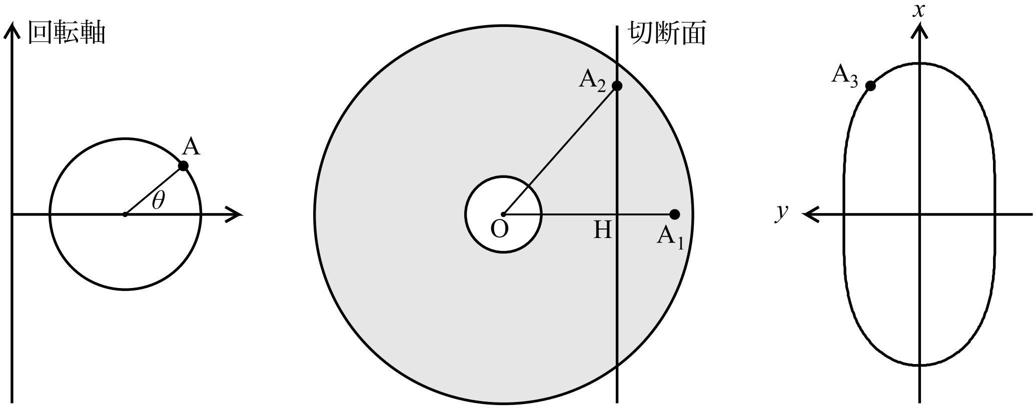


図 31: 類楕円の方程式を求める

が得られる。従って類楕円は 4 次代数曲線である。

さて、次に、この類楕円に内接する円を考えることにする。微積分を知っている我々は類楕円の方程式を偏微分して接線の傾きを計算して、それをもとに内接円を求めようとしがちであるが、和算家はもっと巧妙な方法を用いていた。そのアイデアは、トーラスに球を内接させて切断面でトーラスと一緒に球も切ってしまうのである。図 32 はそのときのようすである。和算家は、円柱に球を内接させ、その切断面を使い楕円に内接する円の性質を調べている。それと同様な方法を類楕円にも適用しているのだ。

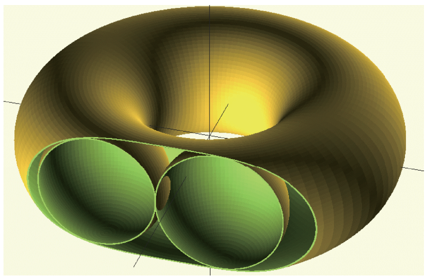


図 32: トーラス内に球を内接

さて、この類楕円の内接円を計算しよう。図 33 のようにトーラス内に半径 b の球を内接させる。トーラスに内接する球の中心を A、A から切断面に下ろした垂線の足を B とすると、B は球を切断面で切った切口の円の中心である。切断面における点 B の座標を $(p, 0)$ とする。AB $= w$ とおくとき、直角三角形 CAB において、$w = \sqrt{b^2 - r^2}$ である。また、直角三角形 AOD において、$p = \sqrt{d^2 - (d - w)^2} = \sqrt{2dw - w^2}$ である。

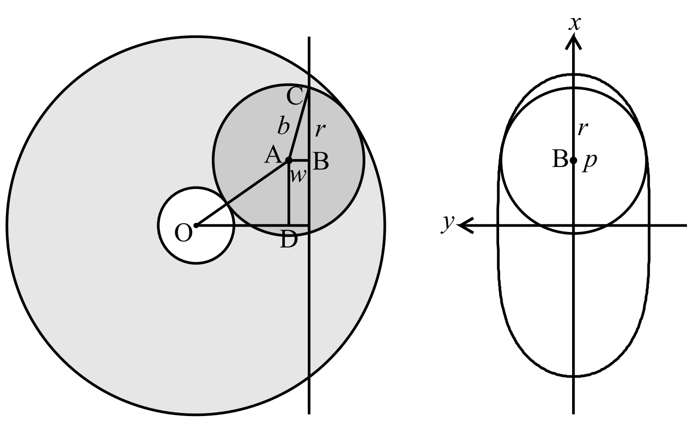


図 33: 類楕円の内接円

以上から、図 34 において、長軸 $2a$ で短軸 $2b$ の類楕円に内接する円の中心の座標を $(p, 0)$ とし半径を r とするとき、

$$w = \sqrt{b^2 - r^2} \tag{4}$$

$$p = \pm\sqrt{2dw - w^2} \tag{5}$$

が成り立つ。

これで類楕円についての準備ができたので、算額の問題に移ることにする。図 35 のように、類楕円に内接する大小 2 個の円があるとき、それぞれの中心の座標を $(p_1, 0)$, $(p_2, 0)$ とし、それぞれの半径を r_1, r_2 とする。このとき r_1 から r_2 を求めるためには、式 (1)、(4)、(5) により、以下の連立方程式

$$d = \frac{a^2 - b^2}{2b} \tag{6}$$

$$w_1 = \sqrt{b^2 - r_1^2} \tag{7}$$

$$p_1 = -\sqrt{2dw_1 - w_1^2} \tag{8}$$

$$w_2 = \sqrt{b^2 - r_2^2} \tag{9}$$

$$p_2 = \sqrt{2dw_2 - w_2^2} \tag{10}$$

$$p_2 - p_1 = r_1 + r_2 \tag{11}$$

を考えればよい。

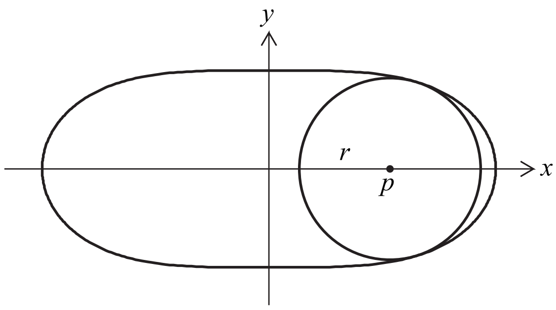


図 34: 内接円の位置と半径

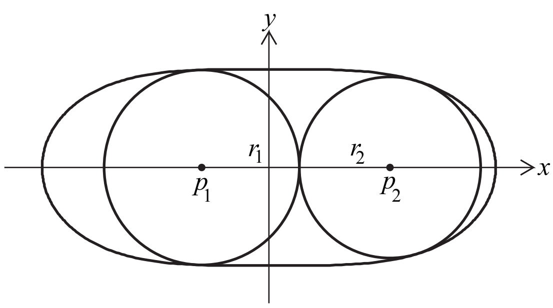


図 35: 類楕円の 2 つの内接円

このうち、d, w_1, p_1 は a, b, r_1 が与えられた時にすぐに定まる値であるので、実質的には (9)〜(11) の 3 式から w_2, p_2 を消去すればよい。そこで、(11) に (10) を代入して平方すると、

$$2dw_2 - w_2^2 = p_1^2 + 2p_1(r_1 + r_2) + (r_1 + r_2)^2$$

さらに (8)、(9) を代入すると、

$$2dw_2 - b^2 + r_2^2 = 2dw_1 - w_1^2 + 2p_1(r_1 + r_2) + (r_1 + r_2)^2$$

となる。次に (7) を代入し整理すると、

$$dw_2 = dw_1 + (r_1 + r_2)(p_1 + r_1)$$

が得られ、両辺を平方して (7) と (9) を代入して整理すると、

$$d^2(r_1^2 - r_2^2) = 2dw_1(r_1 + r_2)(p_1 + r_1) + (r_1 + r_2)^2(p_1 + r_1)^2$$

となる。ここで、両辺を $(r_1 + r_2)$ で割って整理することで、

$$r_2(d^2 + (p_1 + r_1)^2) = r_1(d^2 - (p_1 + r_1)^2) - 2dw_1(p_1 + r_1)$$

となり、従って、

$$r_2 = \frac{r_1(d^2 - (p_1 + r_1)^2) - 2dw_1(p_1 + r_1)}{d^2 + (p_1 + r_1)^2} \tag{12}$$

を得る。この式が類楕円の長軸を $2a$、短軸を $2b$ とし、1 つの内接円（半径 r_1）が与えられたとき、(6)〜(8) により d, w_1, p_1 がすぐに計算できるので、それらを用いてもう一つの内接円の半径 r_2 を求める式である。

【算額の解】

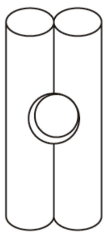
算額の術曰には

$$小円直径\ (2r_2) = \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)\sqrt{b^2 - r^2}}{b} - (b^2 - r_1^2)}$$

と示されている。これは現代解と一致しない。どちらかというと (8) 式とよく似ている。

【問題文】

（左）



図のように、直径が等しい 2 つの円柱を並べ、同じ直径を持つ円柱を直行させて貫通させて抜き取る。円の直径の長さが 10 寸のとき、抜き取った立体の体積を求めよ。

【現代解】

円柱の半径を a とし、2 つの円柱の方程式を

$$y^2 + z^2 \leq a^2 \quad (x : 任意) \tag{13}$$

$$x^2 + (z - a)^2 \leq a^2 \quad (y : 任意) \tag{14}$$

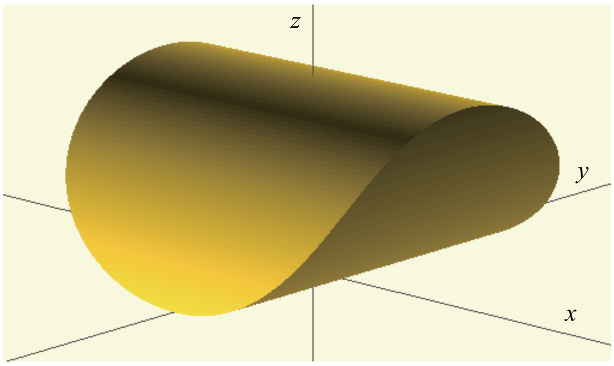


図 36: 立体図形

とする。2 つの円柱の共通部分にあたる立体図形 (図 36) の体積を求めればよい。

そこで、この立体図形の平面 $z = k$ $(0 \le k \le a)$ による切口を考える。円柱 (13) のこの平面による切口は、

$$-\sqrt{a^2-k^2} \le y \le \sqrt{a^2-k^2} \tag{15}$$

また、円柱 (14) の切口は

$$-\sqrt{a^2-(k-a)^2} \le x \le \sqrt{a-(k-a)^2} \tag{16}$$

である。この長方形の領域を図にしたものが図 37 である。その面積は

$$S(k) = 4\sqrt{a^2-k^2}\sqrt{a^2-(k-a)^2} \tag{17}$$

である。

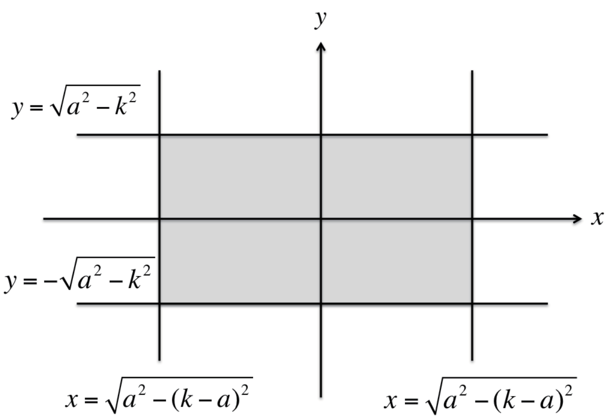


図 37: 切口の長方形

求める立体の体積は、同じ立体が 2 個あるので、

$$V = 2\int_0^a S(k)dk = 8\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\sqrt{a^2-(x-a)^2}dx \tag{18}$$

となる。

この定積分はそのままでは計算できないので、$\sqrt{a^2-x^2}$ を次のように展開する。

$$\sqrt{a^2-x^2} = a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{(1-2k)2^{2k}(k!)^2a^{2k}}x^{2k} \tag{19}$$

これを (18) に代入すると、

$$V = 8a\int_0^a\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{(1-2k)2^{2k}(k!)^2a^{2k}}x^{2k}\sqrt{a^2-(x-a)^2}\right\}dx$$

$$V = 8a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{(1-2k)2^{2k}(k!)^2a^{2k}}\int_0^a x^{2k}\sqrt{a^2-(x-a)^2}dx$$

ここで、

$$I_n = \int_0^a x^{2n}\sqrt{a^2-(x-a)^2}dx \tag{20}$$

とおくとき、

$$V = 8a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{(1-2k)2^{2k}(k!)^2a^{2k}}I_k \tag{21}$$

である。この式の最初の何項かを具体的に書くと、

$$V = 8a\left(I_0 - \frac{1}{2a^2}I_1 - \frac{1}{8a^4}I_2 - \frac{1}{16a^6}I_3 - \frac{5}{128a^8}I_4 - \cdots\right)$$

この I_n を計算するために、$a - x = a\sin\theta$ とおくと、

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a^{2n}(1-\sin\theta)^{2n}\cdot a\cos\theta\cdot(-a\cos\theta)d\theta = a^{2n+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)^{2n}\cos^2\theta d\theta$$

ここで、公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p}\theta\cos^2\theta d\theta = \frac{(2p-1)!!}{(2p+2)!!}\cdot\frac{\pi}{2} \tag{22}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p+1}\theta\cos^2\theta d\theta = \frac{(2p)!!}{(2p+3)!!} \tag{23}$$

と

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^2\theta d\theta = \frac{1}{3}$$

を用いて計算すると

$$V = 8a^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{16}\pi - \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{21}{32}\pi - \frac{28}{15}\right) - \frac{1}{16}\left(\frac{429}{256}\pi - \frac{538}{105}\right) - \frac{5}{128}\left(\frac{2431}{512}\pi - \frac{4664}{315}\right) - \cdots\right)$$

といったぐあいである。ここまで (I_4 まで) の計算での近似値は $V \fallingdotseq 590.3814$ である。

この級数は収束が非常に遅く、正確な値を求めるためには十分大きな n までの定積分 I_n を計算する必要がある。この定積分本当の値を Mathematica で求めてみると、$V \fallingdotseq 580.749614281$ であった。

【算額の解】

算額の術曰は $a = 10$ とするとき

$$V = \frac{\pi}{8}a^3\left\{1 + \frac{3}{1}\cdot\frac{1}{64} - \frac{3}{1}\cdot\frac{1\cdot5}{3}\left(\frac{1}{64}\right)^2 + \frac{3}{1}\cdot\frac{1\cdot5}{3}\cdot\frac{3\cdot7}{6}\left(\frac{1}{64}\right)^3 - \frac{3}{1}\cdot\frac{1\cdot5}{3}\cdot\frac{3\cdot7}{6}\cdot\frac{5\cdot9}{10}\left(\frac{1}{64}\right)^4 + \cdots\right\}$$

で、答曰には「410.65 有奇」と示されている。しかし、現代解と数値が違いすぎて残念である。