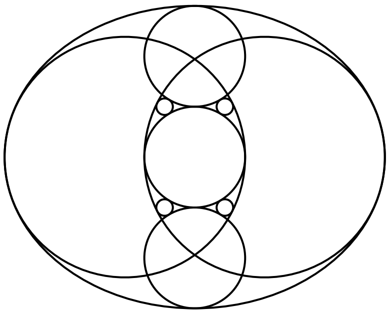
4.26　塩田民之丞

【問題文】



　図のように、楕円内の短軸上に、中円 3 個を描き、その中円 1 個と楕円周上の 1 点（長軸上の先端）で接する大円 2 個を描く。その交わったところのすき間に小円 4 個を入れる。短軸の長さ 2621 寸、大円の直径を最大にするとき、小円の直径はいくらか。

【現代解】

　楕円の長軸の長さを $2a$、短軸の長さを $2b$ とし、その方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とする。中円の半径を r_1、大円の半径を r_2、小円の半径を r_3 とする。また、左上の小円の中心の座標を $(-p, r_1)$ とする。

　中円と大円の半径については、

$$r_1=\frac{b}{3},\quad r_2=\frac{a}{2}+\frac{b}{6} \tag{1}$$

である。

　また、「大円の直径を最大とするとき」と問題にあるので、楕円上の点 $(a,0)$ における曲率半径 $\dfrac{b^2}{a}$ と大円半径 r_2 が一致し $\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{6}$ となり、これを整理すると

$$3a^2+ab-6b^2=0 \tag{2}$$

で、$a,b>0$ であることから

$$a=\frac{\sqrt{73}-1}{6}b \tag{3}$$

を得る。

　小円に関しては、図 50 のように、直角三角形 $\mathrm{O_3O_1P}$ の三平方の定理

$$p^2+r_1^2=(r_1+r_3)^2 \tag{4}$$

と、直角三角形 $\mathrm{O_3QO_2}$ に三平方の定理

$$r_1^2+(r_2-r_1+p)^2=(r_2-r_3)^2 \tag{5}$$

の関係式が成り立つので、この 2 式から p を消去すると、

$$(9b-108r_3)a^2+(216r_3^2-6b^2)a+b^3+12b^2r_3+72br_3^2=0$$

これに式 (3) を代入したいのだが、最初に式 (2) から得られる $3a^2=6b^2-ab$ を先に代入して、

$$(216r_3^2+36br_3-9b^2)a+19b^3-204b^2r_3+72br_3^2=0$$

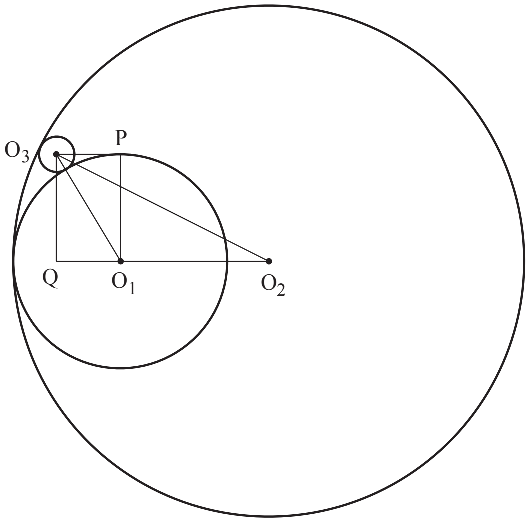


図 50: 塩田の問題

その後に式 (3) を代入して整理すると、

$$(41 - 3\sqrt{73})b^2 + (12\sqrt{73} - 420)br_3 + (72 + 72\sqrt{73})r_3^2 = 0$$

ここで、$b = tr_3$ とおき t の 2 次方程式

$$(41 - 3\sqrt{73})t^2 + (12\sqrt{73} - 420)t + (72 + 72\sqrt{73}) = 0 \tag{6}$$

を解くと、

$$t = \frac{3}{8}\left(19 + \sqrt{73} \pm 4\sqrt{19 + \sqrt{73}}\right)$$

を得る。$t = \frac{b}{r_3} > \frac{b}{r_1} = 3$ であることから、

$$t = \frac{3}{8}\left(19 + \sqrt{73} + 4\sqrt{19 + \sqrt{73}}\right) \tag{7}$$

従って、

$$\text{小円直径} = 2r_3 = \frac{2b}{t} = \frac{16\,b}{3\left(19 + \sqrt{73} + 4\sqrt{19 + \sqrt{73}}\right)} \tag{8}$$

この式に $2b = 2621$ を代入して値を求めると、小円直径 ≒ 144.00024 となる。

【算額の解】

算額の答には、小円直径 144 寸有奇とあり、現代解と一致する。また術曰には、

$$w = \frac{\sqrt{73} + 19}{16}$$

$$\text{小円直径} = \frac{1}{6(\sqrt{w} + w)} \cdot \text{短軸}$$

とあり、これは式 (8) と一致する。