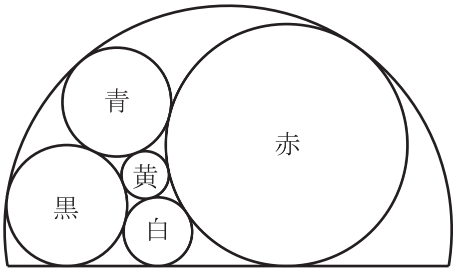
4.23　関家喜多次

【問題文】



図のように、円弧内に青、黄、赤、白、黒の 5 個の円がある。青、赤、黒の 3 個の円の直径が与えられたとき、白円の直径の長さを求めよ。

【現代解】

算額の図では 5 つの円が弓形内におさまっているが、実はこの弓形の円弧はこの問題の計算には関係していない。黒・白・赤の 3 円が一直線に接しているということがこの問題を解く重要なポイントである。図のように 5 円の中心を、A, B, C, X, Y とし、半径をそれぞれ a, b, c, x, y とする。直線と 3 円 B, Y, C の接点を $\mathrm{T_B}$, $\mathrm{T_Y}$, $\mathrm{T_C}$ とし、線分 $\mathrm{T_BT_C}$ の長さを p と置く。

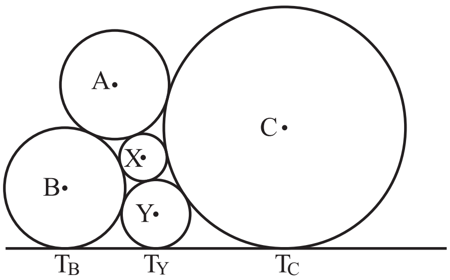


図 46: 5 円と接線

最初に、4 円 A, B, C, X に対して補助定理 21(1) を用いると、

$$(a+x)^2p^4 - 16abcxp^2 - 8ax(a+x)(b+c)p^2 + 16a^2x^2(b-c)^2 = 0 \tag{1}$$

を得る。続いて、4 円 X, B, C, Y に対しても同様に補助定理 21(1) を用いて、

$$(x+y)^2p^4 - 16bcxyp^2 - 8xy(x+y)(b+c)p^2 + 16x^2y^2(b-c)^2 = 0 \tag{2}$$

を得るさらに、補助定理 3 により、$\mathrm{T_BT_Y} = 2\sqrt{by}$、$\mathrm{T_YT_C} = 2\sqrt{cy}$ となるので、$p = \mathrm{T_BT_Y} + \mathrm{T_YT_C}$ より、

$$p^2 = 4y(b + 2\sqrt{bc} + c) \tag{3}$$

となる。

これで、この問題を解くための条件式はすべて出そろった。しかし (3) 式にルート記号が入っているのでこのままでは計算が厄介である。そこで、

$$\sqrt{b} = s, \quad \sqrt{c} = t \tag{4}$$

とおいて、3 式を書き直すと、

$$(a+x)^2p^4-16as^2t^2xp^2-8ax(a+x)(s^2+t^2)p^2+16a^2x^2(s^2-t^2)^2=0 \tag{5}$$

$$(x+y)^2p^4-16s^2t^2xyp^2-8xy(x+y)(s^2+t^2)p^2+16x^2y^2(s^2-t^2)^2=0 \tag{6}$$

$$p^2=4y(s+t)^2 \tag{7}$$

となる。

これら 3 式から p, x を消去し、y に関する方程式を導けばよい。そこで、(6) 式に (7) 式を代入して p を消去して整理すると、

$$4st(st-y)x-y^2(s+t)^2=0$$

となる。これより x は、

$$x=\frac{y^2(s+t)^2}{4st(st-y)} \tag{8}$$

と表される。そこで、(5) 式に (7) 式と (8) 式代入して、根気よく整理すると、

$$(s+t)^4y^3-a(s+t)^2(s^2+6st+t^2)y^2+8as^2t^2(s^2+4st+t^2)y-16as^4t^4=0 \tag{9}$$

となり、y に関する 3 次方程式が得られる。

以上により、算額の問題の解としては、青、黒、赤の 3 円の半径 a, b, c が与えられたとき、(4) 式で s, t を求め、それらを (9) 式に代入し 3 次方程式を解くことで、白円の半径 y が求まることになる。また、黄円の半径 x が必要なときは (8) 式を用いて計算すればよい。

【算額の解】

算額の術曰には、

$$\text{白円直径}\ (2y)=\left\{1-\frac{2\sqrt{bc}}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}\left(\sqrt{\frac{2(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}{\sqrt{bc}}+1-\frac{4\sqrt{bc}}{a}}-1\right)\right\}\times\text{青円直径}\ (2a) \tag{10}$$

と示されている。これは現代解とは一致しない。この問題の解義は『容術』にあるが、これを調べると現代解と同じく補助定理 21(1)（『算法助術』の公式 72）を用いて解かれているが、式 (5) と (6) の処理に誤りがみられ残念である。

図 47 は $a=b=1, c=2$ の場合の図である。このとき、(9) を解いて求めた値は $y\fallingdotseq 0.5753$ で、(10) から求まる値は $y\fallingdotseq 0.5663$ で誤差はわずかである。図は、左が (9) を用い、右が (10) を用いて描いた。右の図では青円と黄円の間に少し隙間ができている。

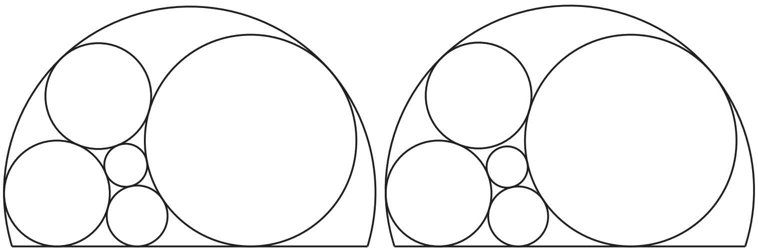


図 47: $a=b=1, c=2$ の場合の図