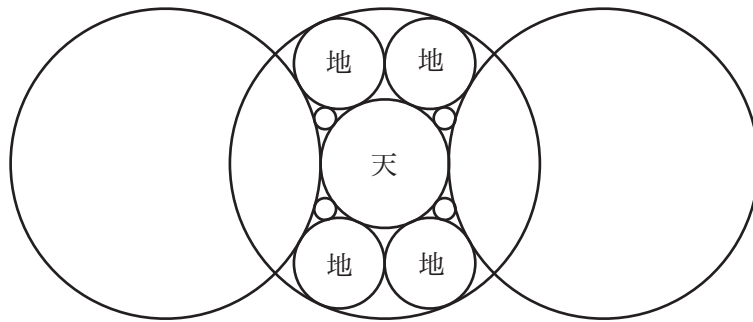


4.17 俊野卷衛

【問題文】



図のように、直径が等しい3個の円が交わり、その間に天円1個、地円4個、人円4個がある。地円の直径の長さが与えられたとき、人円の直径の長さを求めよ。

【現代解】

等しい3円の中央の円の中心をO、右側の円の中心をA、半径を a とする。天円の半径を b 、地円の半径を c 、人円の半径を r とする。右上の地円の中心をC、CからOAに下ろした垂線の足をHとする。直線OCと円Cの2交点を図39のようにB、Dとする。

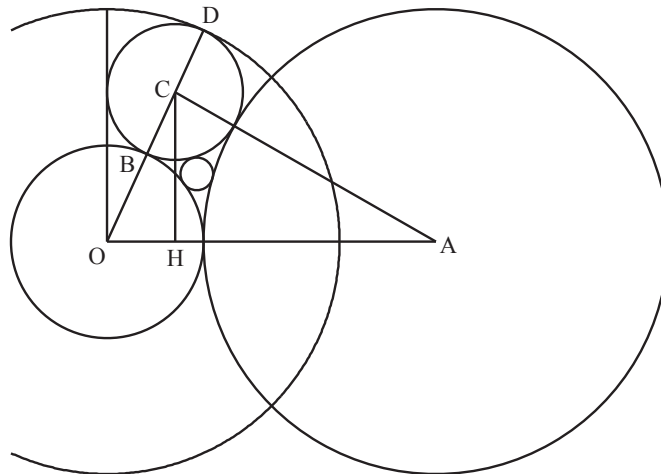


図 39: 俊野の算額

最初に、ODの長さを考えることで、

$$a = b + 2c \quad (1)$$

を得る。次に $\triangle COH$ に三平方の定理を用いて、

$$CH^2 = (b + c)^2 - c^2 \quad (2)$$

また、 $\triangle CHA$ に三平方の定理を用いて、

$$CH^2 = (a + c)^2 - (a + b - c)^2 \quad (3)$$

である。

この3式を整理すると、 $b^2 = 2c^2$ となるので、

$$b = \sqrt{2}c, \quad a = (2 + \sqrt{2})c \quad (4)$$

となる。

最後は、補助定理 19(2) の式

$$(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - 2abc(a + b + c))r^2 - 2abc(ab + bc + ca)r + a^2b^2c^2 = 0 \quad (5)$$

を用いて、人円の半径 r を求めればよい。式 (4) を代入して整理すると、

$$2(1 + \sqrt{2})r^2 + 4(3 + 2\sqrt{2})cr - (3 + 2\sqrt{2})c^2 = 0$$
$$r^2 + 2(1 + \sqrt{2})cr - \frac{1 + \sqrt{2}}{2}c^2 = 0 \quad (6)$$

この2次方程式を r について解くと、

$$r = (1 + \sqrt{2}) \left(-1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})} \right) c$$

となるが、その一つは負となるので不適であり、

$$r = (1 + \sqrt{2}) \left(-1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})} \right) c \quad (7)$$

となる。

【算額の解】

算額の答は、(7) 式の係数の逆数を計算し、より簡潔な式

$$r = \frac{c}{2 + \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}} \quad (8)$$

を導いている。奉納者は (6) 式を

$$\left(\frac{c}{r}\right)^2 - 4\left(\frac{c}{r}\right) + 2(1 - \sqrt{2}) = 0$$

と変形し、これから

$$\frac{c}{r} = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

を導いたものと思われる。