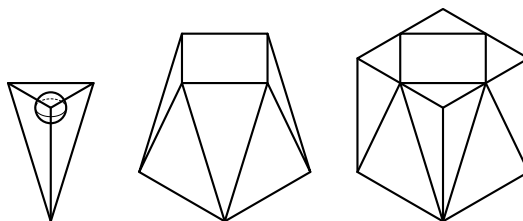


4.6 仙波収平

【問題文】



図のように、上面が正方形の直方体において、上面の各辺の中点より下面の4つの頂点を結ぶ線分を含む平面で切り取ってできる4個の三角錐の一個に球を内接させる。上面にできた正方形の周りの長さで切断面のすべての斜線の長さの和が77寸のとき、切り取られてできた立体の表面積が最大になる時の内接球の表面積を求めよ。

【現代解】

与えられた和を $p = 77$ とし、直方体の上面の正方形の1辺の長さを $2a$ 、直方体の高さを h とする。

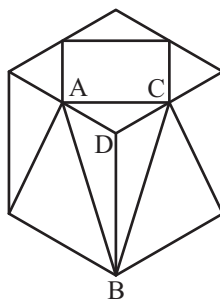


図9: 仙波の問題

図9のように、直方体から切り取る三角錐 ABCD の切り口は二等辺三角形 $\triangle ABC$ で、等辺の長さは $AB = BC = \sqrt{a^2 + h^2}$ 、底辺の長さは $AC = \sqrt{2}a$ である。その切り口の周りの長さの和が p となるので、

$$4(\sqrt{2}a + 2\sqrt{a^2 + h^2}) = p \quad (1)$$

である。この立体の表面積 S は

$$S = (\sqrt{2}a)^2 + (2a)^2 + 4 \cdot ah + 4 \cdot \frac{\sqrt{2}a}{2} \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}$$

従って、

$$S = 6a^2 + 4ah + 2\sqrt{2}a \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2} \quad (2)$$

である。

切り取った三角錐1個の体積を V_1 、表面積を S_1 とすると

$$V_1 = \frac{a^2 h}{6}$$

$$S_1 = \frac{a^2}{2} + ah + \frac{a}{2} \sqrt{a^2 + 2h^2}$$

となる。三角錐に内接する球の半径 r は、 $V_1 = \frac{1}{3}rS_1$ であることにより

$$r = \frac{3V_1}{S_1} = \frac{ah}{a + 2h + \sqrt{a^2 + 2h^2}} \quad (3)$$

である。三角錐に内接する球の表面積 K は

$$K = 4\pi r^2 \quad (4)$$

である。

そこで数値計算により、条件 (1) のもとで、(2) の最大値を求めると、

$$S = 291.0888 \quad (a = 5.181290, \quad h = 2.948057) \quad (5)$$

であった。図 10 がそのときの直方体の形である。また、このときの r, K の値は

$$r = 0.8616259, \quad K = 9.329264 \quad (6)$$

となる。

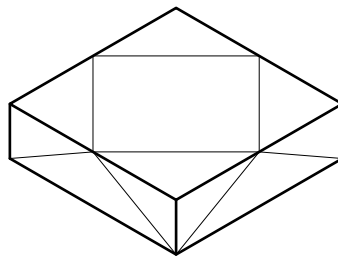


図 10: S を最大にするときの直方体

【算額の解】

算額の術曰には、

$$\text{球の表面積}(K) = \frac{\sqrt{10} - 3}{\frac{32}{\sqrt{10}} + 17.6} \times \pi \times 0.9 \times 77^2$$

と示されている。また、答曰には「100 歩有奇」とある。

しかし、現代解の (6) での K の値とはあまりにも大きな違いがある。問題文の解釈などを変えて、いろいろと試みたが正しい答には出会えなかった。どこかで思い違いをされたと思われ残念である。