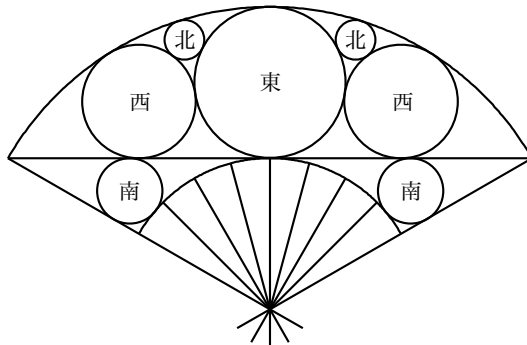


4.18 高阪金次郎

【問題文】



図のように、中心角 120° の扇形内に東円 1 個、西円、南円、北円がそれぞれ 2 個ある。南円の直径の長さが与えられたとき、北円の直径の長さを求めよ。

【現代解】

扇形の半径を r とし、東円、西円、南円、北円それぞれの半径を x, y, z, w とする。東円の半径 x は、扇形の中心角が 120° なので、

$$x = \frac{1}{4}r \quad (1)$$

である。

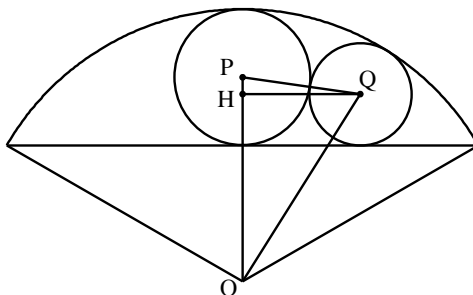


図 40: 西円を求める

扇形の中心を O 、東円の中心を P 、西円の中心を Q とし、 Q から直線 PO に下ろした垂線の足を H とするとき、 $QH^2 = PQ^2 - PH^2 = OQ^2 - OH^2$ より、

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = (r-y)^2 - \left(\frac{r}{2} + y\right)^2$$

(1) 式を代入し整理すると、

$$y = \frac{3}{16}r \quad (2)$$

となる。

扇形の弦を AB とし、南円の中心を R 、 R から直線 OB に下ろした垂線の足を K とする。弦 AB の下側にある小さい扇形の半径は $\frac{r}{2}$ である。ここで $\angle RBK = 15^\circ$ より、 $BK = z \cot 15^\circ = (2 + \sqrt{3})z$ となるので、 $\triangle ROK$ に三平方の定理を用いると、

$$z^2 + (r - (2 + \sqrt{3})z)^2 = \left(\frac{r}{2} + z\right)^2$$

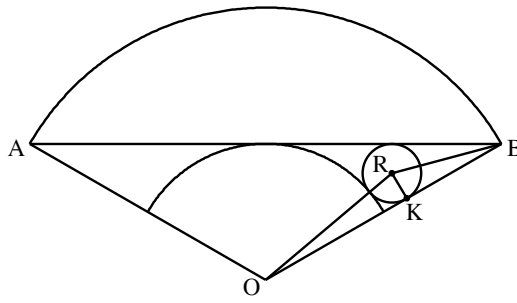


図 41: 南円を求める

これを整理することにより、

$$(r - 2z)(3r - 14z - 8\sqrt{3}z) = 0$$

となる。ここで、 $r = 2z$ は南円が大きすぎて不適。従って、

$$r = \frac{2}{3}(7 + 4\sqrt{3})z \quad (3)$$

となる。

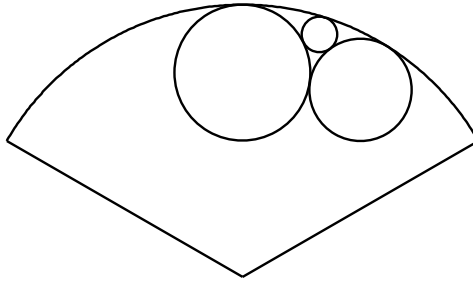


図 42: 北円を求める

北円の半径 w については、補助定理 19 (3) に東円、西円、北円、扇形の半径を代入すると、

$$\left(\frac{4}{r} + \frac{16}{3r} + \frac{1}{w} - \frac{1}{r}\right)^2 = 2\left(\left(\frac{4}{r}\right)^2 + \left(\frac{16}{3r}\right)^2 + \left(\frac{1}{w}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2\right)$$

分母を払い整理すると、 $193w^2 - 150rw + 9r^2 = 0$ となるので、 $w = \frac{3(25 \pm 12\sqrt{3})}{193}r$ である。ここで、 $\frac{3(25 + 12\sqrt{3})}{193} = 0.71167\dots$ は北円の半径が大きすぎるので不適。従って、

$$w = \frac{3(25 - 12\sqrt{3})}{193}r \quad (4)$$

となる。

最後に、式 (4) に (3) を代入することで

$$w = \frac{2}{193}(31 + 16\sqrt{3})z \quad (5)$$

となる。従って北円の直径と南円の直径の比は

$$\frac{2w}{2z} = \frac{2}{193}(31 + 16\sqrt{3}) = 0.6084229\dots$$

である。

【算額の解】

算額の術曰には、

$$\text{北円直径} = \frac{\sqrt{3072} + 62}{193} \cdot \text{南円直径}$$

とあり、現代解と一致する。