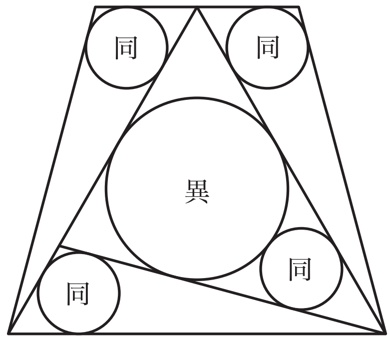
4.10 井手上文左衛門

【問題文】



図のように、等脚台形内にある正三角形を線分によって分け、その間に、異円 1 個と同円 4 個を内接させる。異円の直径の長さが与えられたとき、等脚台形の上辺の長さを求めよ。

【現代解】

図 17 のように、等脚台形を ABCD、正三角形を EBC、正三角形内の斜線を FC、線分 EC と異円との接点を G、線分 FB と同円との接点を H とする。また、正三角形の 1 辺の長さを a、異円の半径を R、同円の半径を r とし、等脚台形の上辺を AD = x とする。

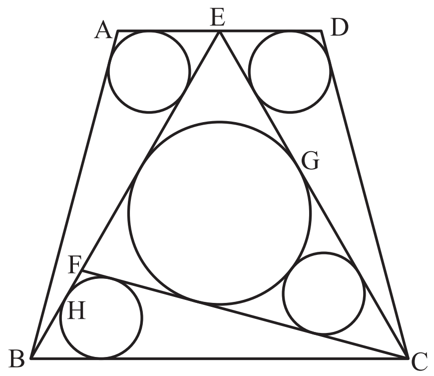


図 17: 井手上の問題

正三角形の高さが $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ で、正三角形の内接円の半径が $\frac{\sqrt{3}}{6}a$ なので、正三角形 EBC を斜線 FC で分けた 2 つの領域に内接する異円と同円に補助定理 8 を用いると、

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a(R + r - \frac{\sqrt{3}}{6}a) = 2Rr$$

となり、これを整理すると

$$a^2 - 2\sqrt{3}(R + r)a + 8Rr = 0 \tag{1}$$

である。また、GC = $a - \sqrt{3}R$ なので補助定理 9 を用いると

$$a = \sqrt{3}R + \frac{2R\sqrt{Rr}}{R - r} \tag{2}$$

となる。ここで (1) に (2) を代入して、$t = \frac{r}{R}$ とおき整理すると

$$2t^3 - 7t^2 + 12t - 3 = 4\sqrt{3t}\,(1 - t)t$$

となる。両辺を 2 乗すると

$$(2t^3 - 7t^2 + 12t - 3)^2 = 48(1-t)^2 t^3 \tag{3}$$

となり、6 次方程式

$$4t^6 - 76t^5 + 193t^4 - 228t^3 + 186t^2 - 72t + 9 = 0 \tag{4}$$

を得る。

ここから先は数値計算が必要となる。6 次方程式 (4) は数値計算により 4 つの実数解を持つ。

$$t \fallingdotseq 0.2297966479, \quad 0.4472007734, \quad 1.474533350, \quad 16.23342371$$

図 17 において $\angle\mathrm{ECF} < 60°$ であることと、$\angle\mathrm{ECF} = 60°$ のとき $R : r = 3 : 1$ になることより、$\dfrac{1}{3} < t < 1$ である。従ってこの問題に適する解は

$$t \fallingdotseq 0.4472007734 \tag{5}$$

である。

最後に $\mathrm{AD} = x$ を求める必要があるが、$\triangle\mathrm{DEC} \equiv \triangle\mathrm{FBC}$ に着目することで $x = 2\mathrm{FB} = 2(\mathrm{FH} + \mathrm{HB})$ である。ここで、$\mathrm{HB} = \sqrt{3}r$ であることと、補助定理 10 により $\mathrm{FH} = \dfrac{a}{2} - \sqrt{3}R$ であることにより、

$$\begin{aligned} x &= a - 2\sqrt{3}R + 2\sqrt{3}r \\ &= \frac{2R\sqrt{Rr}}{R-r} - \sqrt{3}R + 2\sqrt{3}r \end{aligned}$$

さらに $r = tR$ を代入することで

$$x = \left\{ \frac{\sqrt{t}}{1-t} - \frac{\sqrt{3}}{2}(1-2t) \right\} 2R \tag{6}$$

となる。そこで (5) を代入することで

$$x \fallingdotseq 1.118266231 \times 2R$$

上辺の長さが求まる。

【算額の解】

算額の術曰には、6 次方程式

$$(2t^3 - 7t^2 + 12t - 3)^2 = 48(1-t)^2 t^2$$

を解いて

$$x = \left\{ \frac{\sqrt{t}}{\frac{\sqrt{3}}{2}(1-t)} - (1-2t) \right\} 2R$$

とある。現代解との違いは、6 次方程式の右辺の最後が t^3 ではなく t^2 となっていることと、三角中鈎率 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の位置が違うことの 2 点である。前者については、この 6 次方程式だと 3 次式の積に因数分解できることにすぐ気づくはずなので、これは単なる転記ミスと思われる。後者については不明であるが、これも何らかの記載上のミスではないだろうか。