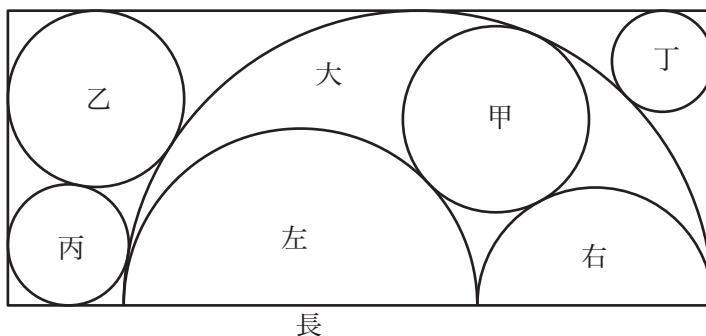


#### 4.29 岩田清謹

【問題文】



図のように、長方形内に、大、左、右という半円がありその間に甲円、大半円の外側に乙、丙、丁の3円を入れる。左半円の直径は大半円の6割で、右半円の直径は大半円の4割である。丙円の直径が既知のとき、各円の直径及び長方形の横の長さはいくらか。

【現代解】

大半円の半径を  $r$ 、左半円、右半円のそれぞれの半径を  $p, q$  とし、甲円、乙円、丙円、丁円のそれぞれの半径を  $x, y, z, w$  とする。また、長方形の横の長さを  $a$  とする。これらの変数相互の関係式を求めていくことにする。

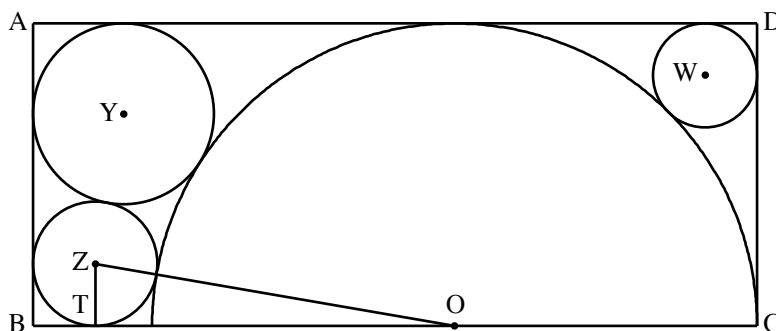


図 56: 大半円、乙円、丙円、丁円

最初に大半円、乙円、丙円について考える。図のように長方形を  $ABCD$  とし、大半円、乙円、丙円のそれぞれの中心を  $O, Y, Z$  とし、 $Z$  から辺  $BC$  に引いた垂線を  $ZT$  とする。乙円の半径  $y$ 、丙円の半径  $z$  と長方形の縦の長さ  $r$  に補助定理 7(1) を用いると、

$$\sqrt{r} = \sqrt{y} + \sqrt{z} \quad (1)$$

で、乙円の半径  $y$ 、大半円の半径  $r$  と長方形の横の長さ  $a$  に補助定理 7(1) を用いると、

$$\sqrt{a} = \sqrt{y} + \sqrt{r} \quad (2)$$

となる。また、 $\triangle ZTO$  に三平方の定理を用いて、

$$z^2 + (a - z - r)^2 = (z + r)^2$$

となりこれを整理すると

$$a - z = \sqrt{2ar} \quad (3)$$

である。ここで、 $\sqrt{r} = R$ ,  $\sqrt{y} = Y$ ,  $\sqrt{z} = Z$ ,  $\sqrt{a} = A$  とおくと、3式は

$$R = Y + Z, \quad A = Y + R, \quad A^2 - Z^2 = \sqrt{2} AR$$

となり、この連立方程式を解くことで、

$$R = \frac{3 + \sqrt{2}}{2} Z, \quad Y = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} Z, \quad A = (2 + \sqrt{2}) Z$$

がえられる。従ってこれらを平方すれば

$$r = \frac{11 + 6\sqrt{2}}{4} z \quad (4)$$

$$y = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{4} z \quad (5)$$

$$a = 2(3 + 2\sqrt{2})z \quad (6)$$

である。

大半円の半径  $r$  と丁円の半径  $w$  については、2円に外接する正方形を考え、補助定理 7(1) を用いると、

$$\sqrt{2r} = \sqrt{r} + \sqrt{w}$$

であり、従って

$$w = (3 - 2\sqrt{2})r = \frac{9 - 4\sqrt{2}}{4} z \quad (7)$$

となる。

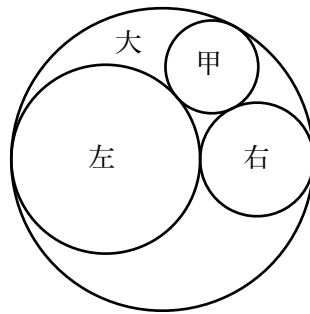


図 57: 大円、左円、右円、甲円

最後に、左円、右円、甲円については図 57 のように大円全体を見ながら考える。補助定理 19(3) の関係式

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{x} - \frac{1}{r}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{r^2}\right)$$

に左円の半径  $p$  と右円の半径  $q$  が

$$p = \frac{3}{5}r, \quad q = \frac{2}{5}r$$

であることを用いて整理すると、甲円の半径  $x$  は

$$x = \frac{6}{19}r$$

となり、従って

$$p = \frac{3(11+6\sqrt{2})}{20}z, \quad q = \frac{11+6\sqrt{2}}{10}z, \quad x = \frac{3(11+6\sqrt{2})}{38}z \quad (8)$$

である。

**【算額の解】**

算額の術曰では、各長さを丙円直径で割った比を以下のように求めている。

$$\begin{aligned} \frac{a}{2z} &= 3 + 2\sqrt{2} \\ \frac{2y}{2z} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{a}{2z} = \frac{3+2\sqrt{2}}{4} \\ \frac{2r}{2z} &= 3 \cdot \frac{2y}{2z} + \frac{1}{2} = \frac{11+6\sqrt{2}}{4} \\ \frac{2p}{2z} &= \frac{3}{5} \cdot \frac{2r}{2z} = \frac{3(11+6\sqrt{2})}{20} \\ \frac{2q}{2z} &= \frac{2}{5} \cdot \frac{2r}{2z} = \frac{11+6\sqrt{2}}{10} \\ \frac{2x}{2z} &= \frac{\frac{2p}{2z} \cdot \frac{2q}{2z} \cdot \frac{2r}{2z}}{\left(\frac{2p}{2z}\right)^2 + \frac{2q}{2z} \cdot \frac{2r}{2z}} = \frac{3(11+6\sqrt{2})}{38} \\ \frac{2w}{2z} &= (3-2\sqrt{2}) \cdot \frac{2r}{2z} = \frac{9-4\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

これらの結果はすべて現代解と一致する。