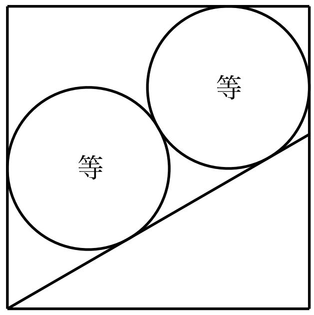
4.27 岩田源介

【問題文】

（右）



図のように、正方形に斜線を引き、等円を 2 個入れる。正方形の一辺が既知のとき、等円の直径はいくらか。

【現代解】

正方形の 1 辺の長さを a とし、等円の半径を r とする。

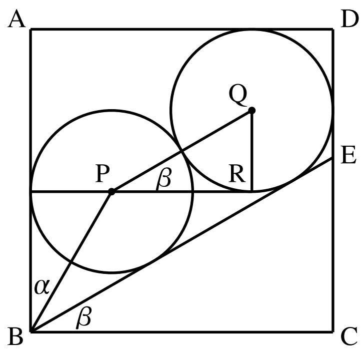


図 51: 岩田の問題（右）

図のように正方形を ABCD とし、2 つの等円の中心を P, Q とする。また、点 R を PR//BC で QR//AB となる点とし、さらに、$\angle\mathrm{ABP} = \alpha,\quad \angle\mathrm{EBC} = \angle\mathrm{QPR} = \beta$ とおくとき、

$$\beta = 90^\circ - 2\alpha$$

である。ここで AD の長さを計算すると、

$$a = 2r + 2r\cos\beta \tag{1}$$

である。次に AB の長さを計算すると、

$$a = r + 2r\sin\beta + r\cot\alpha \tag{2}$$

である。これら 2 式から

$$2\cos\beta - 2\sin\beta - \cot\alpha + 1 = 0$$

となり、これに $\sin\beta = \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha, \quad \cos\beta = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ を代入して、分母を払い整理すると、

$$4\sin^2\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha) - (\sin\alpha + \cos\alpha) = (\sin\alpha + \cos\alpha)(2\sin\alpha + 1)(2\sin\alpha - 1) = 0$$

となる。ここで $0 < \alpha < 45°$ より $(\sin\alpha + \cos\alpha)(2\sin\alpha + 1) > 0$ なので、$(2\sin\alpha - 1) = 0$ である。従って、

$$\alpha = 30°, \quad \beta = 30° \tag{3}$$

となる。この値を式 (1) に代入することで、

$$a = 2r + \sqrt{3}r$$

となり、

$$r = (2 - \sqrt{3})a \tag{4}$$

を得る。

【算額の解】

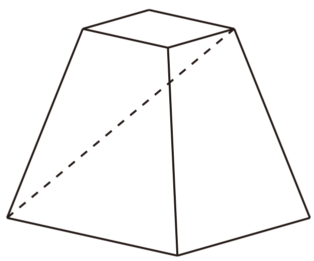
算額の術曰には、

$$\text{等円直径} = \frac{8a - \sqrt{48a^2}}{2}$$

と書かれている。これは (4) に一致する。

【問題文】

（中）



図のように、四角錐台をその対角線を含む平面で切ってできる図形がある。上部の正方形の一辺が既知、また左上の角錐の体積が既知、また高さが既知のとき、下部の正方形の一辺の長さはいくらか。

【現代解】

図 52 のように四角錐台を ABCD-EFGH とし、対角線 DF を含む切り口の平面としては、直線 EG に平行な平面を考えるのが自然であろう。そうすると、切り口は四角形 DIFK となる。ここで、3 線分 AC, IK, EG は平行である。従って切り口の上部の図形は正確には六面体 ABCD-IFKD である。また、切り口の下部の図形は六面体 IFKD-EFGH である。2 点 I, K を含み底面と平行な平面で四角錐台を切った切り口は正方形 IJKL である。

既知の長さを、AB = a、上部六面体 ABCD − IFKD の体積を V、四角錐台の高さを h とする。また、求めたい長さ EF = b とする。

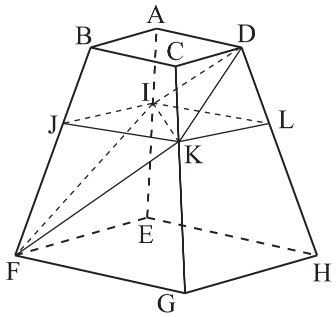


図 52: 岩田の問題（中）

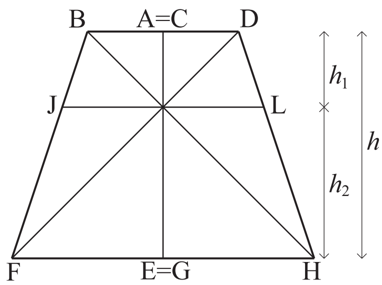


図 53: 横から見た図

図 53 は四角錐台を辺 CG 側の真横から見た図である。四角錐台 ABCD-IJKL の高さを h_1、体積を V_1 とし、四角錐台 IJKL-EFGH の高さを h_2、体積を V_2 とする。また、正方形 IJKL の 1 辺の長さを c とする。BD : FH = $a : b$ より、$h_1 : h_2 = a : b$ となるので、

$$h_1 = \frac{ah}{a+b}, \quad h_2 = \frac{bh}{a+b}, \quad c = \frac{2ab}{a+b} \tag{5}$$

である。また、補助定理 22 により、

$$V_1 = \frac{1}{3}(a^2 + ac + c^2)h_1, \quad V_2 = \frac{1}{3}(b^2 + bc + c^2)h_2 \tag{6}$$

である。

三角錐 DIKL の体積を V_1'、三角錐 IJKF の体積を V_2' とすると。

$$V_1' = \frac{1}{6}c^2 h_1, \quad V_2' = \frac{1}{6}c^2 h_2 \tag{7}$$

である。従って、

$$V = V_1 - V_1' + V_2' = \frac{1}{3}(a^2 + ac)h_1 + \frac{1}{6}c^2 h$$

これを整理すると、

$$V = \frac{a^2(a+2b)h}{3(a+b)}$$

となり、b について解くと

$$b = \frac{3aV - a^3 h}{2a^2 h - 3V} \tag{8}$$

を得る。

【算額の解】

算額の術曰には

$$w = \frac{3V}{h} - a^2$$

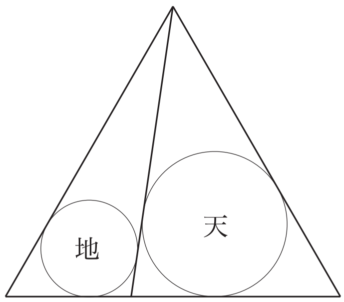
と置くとき

$$b = \frac{aw}{a^2 - w}$$

と書いてある。これは式 (8) に一致する。

【問題文】

（左）



図のように、正三角形内に斜線を引き、天円、地円を入れる。天円と地円の直径が既知のとき、正三角形の一辺の長さを求めよ。

【現代解】

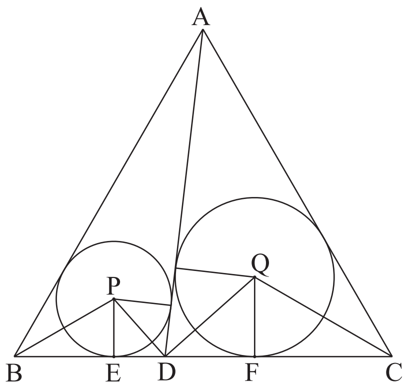


図 54: 岩田の問題（左）

図 54 のように記号を定める。地円 P の半径を a，天円 Q の半径を b とし、正三角形 ABC の一辺の長さを x とする。

$\mathrm{BE} = \sqrt{3}a$、$\mathrm{CF} = \sqrt{3}b$ であることから、$\mathrm{DE} = p$、$\mathrm{DF} = q$ とおくとき

$$x = \sqrt{3}(a + b) + p + q \tag{9}$$

となるので、 $p + q$ の長さが求まればよいことになる。

補助定理 23 により、

$$pq = ab \tag{10}$$

である。また、補助定理 10(2) により、

$$q - p = \sqrt{3}(b - a) \tag{11}$$

である。式 (10) と (11) から p, q が求まるが、必要なのは $p + q$ なので、

$$(p + q)^2 = (q - p)^2 + 4pq = 3(b - a)^2 + 4ab = 3a^2 - 2ab + 3b^2$$

により、

$$p + q = \sqrt{3a^2 - 2ab + 3b^2}$$

となる。これを (9) に代入することで、正三角形の 1 辺の長さは

$$x = \sqrt{3}(a + b) + \sqrt{3a^2 - 2ab + 3b^2} \tag{12}$$

である。

【算額の解】

　算額の術曰には、

$$w = \frac{\sqrt{3}}{2}(2a + 2b)$$

と置くとき

$$x = w + \sqrt{w^2 - 2 \cdot 2a \cdot 2b}$$

と書いてある。これは式 (12) と一致する。