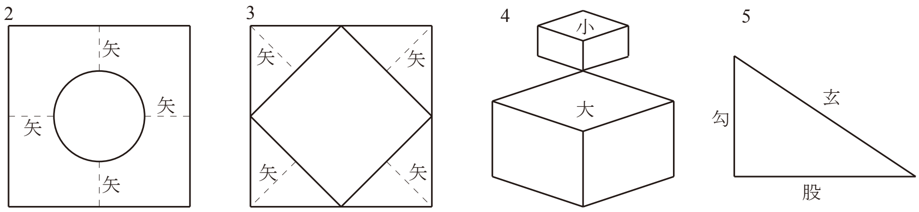
4.30　大野猶吉

【問題文】

1. 　金 25 両 2 分の代金より銭 143 貫の代金は 186 匁多い。また、金 1 両より銭 1 貫の代金は 48 匁安い。金と銭の各相場はいくらか。
2. 　正方形内に円があり、矢は各 2 寸、外余積 52 歩である。円の直径を求めよ。
3. 　正方形内に正方形があり、矢は各 2 寸 5 分、外余積 25 歩である。小さい正方形の 1 辺の長さを求めよ。
4. 　大小の立方体があり、大小の 1 辺長さの差は 2 寸、大小の体積の差は 296 歩である。小さい正方形の 1 辺の長さを求めよ。
5. 　直角三角形において、勾と股の差が 7 寸、玄と股の差が 2 寸のとき、股の長さを求めよ。



問題 1.

【現代解】

　銭 1 貫の相場を x 匁とし、金 1 両の相場を y 匁とする。

　問題文に「金 25 両 2 分の代金より銭 143 貫の代金は 186 匁多い」とあるので、

$$25.5y + 186 = 143x$$

となる。ここで、金 25 両 2 分とは 25.5 両であることに注意。また、「金 1 両より銭 1 貫の代金は 48 匁安い」とあるので、

$$y = x + 48$$

である。これら 2 式から、x の方程式

$$25.5(x + 48) + 186 = 143x$$

が得られる。これを解くと、$x = 12$ となる。従って、銭 1 貫の相場は 12 匁で、金 1 両の相場は 60 匁である。

【算額の解】

　$143x - 186$ と $25.5(x + 48) = 25.5x + 1224$ は等しいので、方程式

$$143x - 186 = 25.5x + 1224$$

を解くことで、銭 1 貫の相場は 12 匁で、金 1 両の相場は 60 匁である。

問題 2.

【現代解】

円の半径を r、矢の長さを a、外余積を S とする。正方形の 1 辺の長さは $2(r+a)$ であることより、外余積は

$$S = 4(r+a)^2 - \pi r^2 = (4-\pi)r^2 + 8ar + 16a^2$$

となる。算額では $\pi = 3$ としているので、それに従えば、2 次方程式

$$r^2 + 8ar + 4a^2 - S = 0$$

を解けばよいことになる。そこで、$a = 2$、$S = 25$ を代入して、

$$r^2 + 16r - 36 = 0$$

これを解いて $r = 2$、従って円の直径は 4 である。

【算額の解】
　円の直径を d と置いて、方程式

$$0.75d^2 + S = (d+2a)^2$$

を解くことで、円の直径は 4 寸となる。

問題 3.

【現代解】
　正方形の一辺の長さを x、矢の長さを a、外余積を S とする。外余積にあたる部分は 4 つの直角二等辺三角形になっていて、折り紙のようにその部分を内側に折ると、内側の正方形にぴったりと重なる。従って内側の正方形の面積は外余積に等しいことになる。従って

$$x^2 = S$$

となる。$S = 25$ を用いてこれを解けば、1 辺の長さは $x = 5$ である。
　また、同様にして、正方形の 1 辺は矢の長さの 2 倍であることから、

$$x = 2a$$

と考えてもよい。

【算額の解】
　方程式

$$x^2 + S = (x+2a)^2$$

を解くことで、正方形の 1 辺の長さは 5 寸となる。算額にはこのように書かれているが、方程式は

$$x^2 + S = \left(\frac{x+2a}{\sqrt{2}}\right)^2$$

とするのが正しい。

問題 4.

【現代解】
　小さい立方体の 1 辺の長さを x、大小の立方体の 1 辺の差を p、大小の立方体の体積の差を q とする。大きい立方体の 1 辺の長さは $x+p$ となる。2 つの体積の差を計算すると、

$$(x+p)^3 - x^3 = q$$

となる。整理すると p の 2 次方程式

$$3px^2 + 3p^2x + p^3 - q = 0$$

となり、これに $p = 2,\ q = 296$ を代入して

$$6x^2 + 12x - 288 = 0$$

この解は $x = -8, 6$ なので、小さい立方体の 1 辺の長さは $x = 6$ である。

【算額の解】

方程式

$$x^3 = x^3 + q$$

を解くことで、大きい正方形の 1 辺の長さは 8 寸、小さい正方形の 1 辺の長さは 6 寸となる。算額にはこのように書かれているが、方程式は

$$(x + p)^3 = x^3 + q$$

とするのが正しい。

問題 5.

【現代解】

勾の長さを a、股の長さを b、玄の長さを c とする。また、勾と股の差を p、玄と股の差を q とする。和算では勾股玄（直角三角形）を考えるときは、「勾 < 股」 とするのが一般的なので、股の長さを b とすれば、勾の長さは $a = b - p$、玄の長さは $c = b + q$ となる。三平方の定理を用いると、

$$(b - p)^2 + b^2 = (b + q)^2$$

整理して、b の 2 次方程式

$$b^2 - 2(p + q)b + p^2 - q^2 = 0$$

となる。これに、$p = 7,\ q = 2$ を代入して $b^2 - 18b + 45 = 0$ を解くと、$b = 3,\ 15$ である。ここで、$b = 3$ のとき $a < 0$ となるので不敵。従って、股の長さは

$$b = 15$$

である。

【算額の解】

方程式

$$(b - p)^2 + b^2 = (b + q)^2$$

を解くことで、股の長さは 1 尺 5 寸となる。