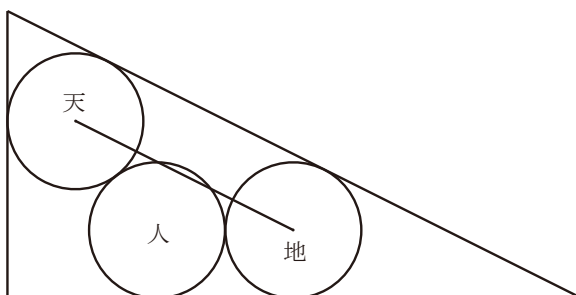


## 4.28 別宮四郎兵衛

【問題文】



図のように、直角三角形内（鉤股弦）に天、地、人の3円を入れる。ただし、3円の直径は等しい。天円の中心から地円の中心までの距離が既知、股と弦の差より鉤は既知だけ長い。直角三角形の3辺と円の直径はいくらか。

【現代解】

図 55 のように、直角三角形を  $\triangle ABC$  とし、天地人3円の中心をそれぞれ  $P, Q, R$  とする。また、 $PQ$  の中点を  $M$  とする。直角三角形の3辺の長さを  $BC = a, CA = b, AB = c$ 、最初の既知の長さを  $PQ = IH = 2p$ 、2つ目の既知の長さを  $a + b - c = 2q$ 、円の半径を  $x$  とする。この問題は  $p, q$  が与えられたとき、 $a, b, c, x$  を求めよということである。

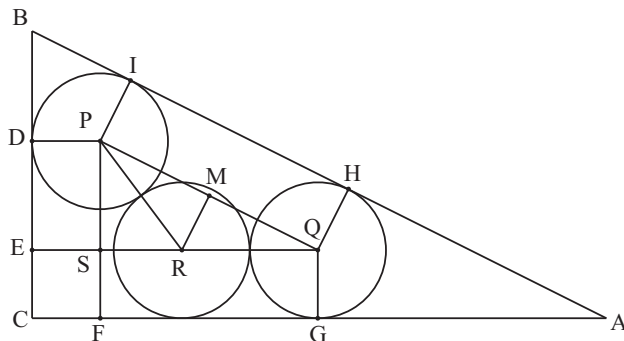


図 55: 別宮の問題

最初に  $q$  について計算する。  $BD = BI, GA = HA$  であることにより、

$$2q = a + b - c = (BD + DE + x) + (x + FG + GA) - (BI + IH + HA) = PS + 2x + SQ - 2p$$

従って、

$$PS + SQ = 2(p + q - x) \quad (1)$$

である。

次に、 $\triangle PSQ \sim \triangle RMQ$  に着目する。  $SQ : PQ = MQ : RQ$  により、

$$SQ = \frac{p^2}{x} \quad (2)$$

である。また、 $PS : PQ = RM : RQ$  と  $RM = \sqrt{RQ^2 - MQ^2} = \sqrt{4x^2 - p^2}$  により、

$$PS = \frac{p}{x} \sqrt{4x^2 - p^2} \quad (3)$$

である。

そこで、(1)に(2)と(3)を代入すると、

$$\frac{p^2}{x} + \frac{p}{x} \sqrt{4x^2 - p^2} = 2(p + q - x)$$

となる。これを整理すると、4次方程式

$$2x^4 - 4(p + q)x^3 + 2(p + q)^2x^2 - 2p^2(p + q)x + p^4 = 0 \quad (4)$$

が得られる。

この方程式はこれ以上整理することは無理のようである。 $p, q$ の具体的な値が分かっているならば、4次方程式を解くフェラーリの公式に代入して $x$ を求めたり、数値計算で $x$ の近似値を求めたりすることは可能であるが、算額には $p, q$ の値が書かれていないのでこれ以上の計算はしないことにする。

問題文には直角三角形の3辺の長さ $a, b, c$ も求めよとあるので、4次方程式(4)の解 $x$ が求まったと仮定して、3辺の長さ求めてみる。それには $\triangle ABC \sim \triangle RMQ$ であることを利用する。その相似比が分かればよいので、2つの直角三角形の内接円の半径を求めることにする。補助定理2により、 $\triangle ABC$ の内接円の半径は $q$ である。同様に、 $\triangle RMQ$ の内接円の半径は $\frac{1}{2}(\sqrt{4x^2 - p^2} + p - 2x)$ である。従って、直角三角形の3辺の長さは

$$a = \frac{2q}{\sqrt{4x^2 - p^2} + p - 2x} \cdot \sqrt{4x^2 - p^2}$$

$$b = \frac{2q}{\sqrt{4x^2 - p^2} + p - 2x} \cdot p$$

$$c = \frac{2q}{\sqrt{4x^2 - p^2} + p - 2x} \cdot 2x$$

である。

#### 【算額の解】

この算額は問題のみで解は書かれていない。