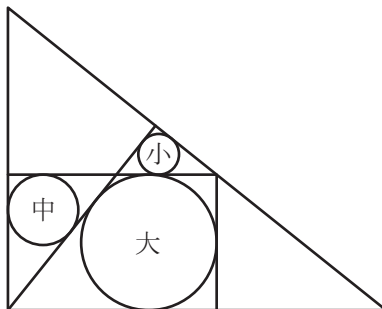


#### 4.4 簡野主計

【問題文】



図のように、直角三角形の3辺、頂点から斜辺に引いた垂線、及び長方形に内接する大中小3個の円がある。直角をはさむ2辺の長さが与えられたとき、3個の円の半径をそれぞれ求めよ。

【現代解】

図6のように点A, B, ..., Iを定める。△ABCの3辺の長さを、 $BC = a$ 、 $CA = b$ 、 $AB = c = \sqrt{a^2 + b^2}$ とする。大中小3円の半径をそれぞれ  $r_1, r_2, r_3$  とする。

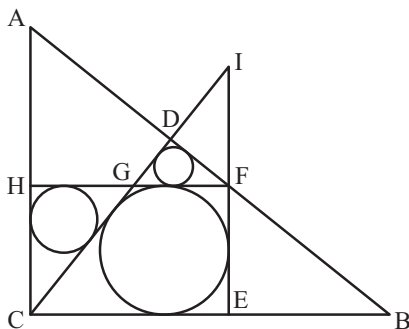


図6: 簡野の問題

以下の計算には△ABC、△AFH、△CIE、△GCH、△GFDがすべて相似であることを用いる。△ABCの内接円の半径を  $r$  とするとき、補助定理2により

$$r = \frac{a + b - c}{2} \quad (1)$$

であることに注意。

線分  $HF = CE$  の長さを  $x$  とおくと、△ABCと△AFHは相似なので、 $BC:CA = FH:HA$  より  $a : b = x : (b - 2r_1)$  となり、

$$x = \frac{a(b - 2r_1)}{b} \quad (2)$$

を得る。

△ABCと△CIEとは相似なので、 $r : r_1 = AC : CE = b : x$ である。これより、

$$br_1 = xr = \frac{a(b - 2r_1)r}{b}$$

となる。これを整理すると、

$$r_1 = \frac{abr}{b^2 + 2ar} = \frac{ab(a + b - c)}{2(b^2 + a(a + b - c))} \quad (3)$$

を得る。

△ABC と △GCH とは相似なので、

$$r : r_2 = BC : CH = a : 2r_1$$

となる。これより、

$$r_2 = \frac{2r}{a}r_1 = \frac{a+b-c}{a}r_1 \quad (4)$$

となる。

また、 $CD = \frac{ab}{c}$  と  $CG = \frac{2cr_1}{a}$  により、

$$GD = CD - CG = \frac{ab}{c} - \frac{2cr_1}{a} = \frac{a^2b - 2c^2r_1}{ac}$$

である。△ABC と △GFD とは相似なので、

$$r : r_3 = AC : GD = b : \frac{a^2b - 2c^2r_1}{ac}$$

従って、

$$r_3 = \frac{r(a^2b - 2c^2r_1)}{abc} = \frac{(a+b-c)(a^2b - 2c^2r_1)}{2abc} \quad (5)$$

を得る。

#### 【算額の解】

算額の術曰には、

$$\text{大円直径 } (2r'_1) = \frac{2a^2b}{2a^2 + (a+b+c)b} \quad (6)$$

$$\text{中円直径 } (2r'_2) = \frac{b^2(2r'_1)^2}{(b - 2r'_1)a^2} \quad (7)$$

$$\text{中円直径 } (2r'_3) = 2r'_2 - \frac{2r'_1}{(w-1)^2 + w^2} \quad \text{ただし、} \quad w = \frac{r'_1}{r'_2} \quad (8)$$

と示されている。

大円については、

$$\begin{aligned} r_1 - r'_1 &= \frac{ab(a+b-c)}{2(a(a+b-c)+b^2)} - \frac{a^2b}{2a^2 + b(a+b+c)} \\ &= \frac{ab^2(a^2 + b^2 - c^2)}{2(a^2 + ab - ac + b^2)(2a^2 + ab + b^2 + bc)} = 0 \end{aligned}$$

中円については、

$$\begin{aligned} r_2 - r'_2 &= \frac{b(a+b-c)^2}{2(a(a+b-c)+b^2)} - \frac{2a^2b^2}{(a+b+c)(2a^2 + ab + b^2 + bc)} \\ &= \frac{b(a^2 + b^2 - c^2)(2a^3 + 3a^2b - 2a^2c + 4ab^2 + b^3 - bc^2)}{2(a+b+c)(a^2 + ab - ac + b^2)(2a^2 + ab + b^2 + bc)} = 0 \end{aligned}$$

小円については、

$$\begin{aligned} r_3 - r'_3 &= \frac{(a+b-c)(a^3 + a^2b - a^2c + ab^2 - ac^2 - bc^2 + c^3)}{2c(a^2 + ab - ac + b^2)} - \frac{2a^2b^2(a+c)(a-b+c)}{(a+b+c)(2a^2 + ab + b^2 + bc)(a^2 + 2ac + b^2 + c^2)} \\ &= \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(2a^7 + 7a^6b + 2a^6c + \dots \text{中略} \dots - b^5c^2 + bc^6)}{2c(a+b+c)(a^2 + ab - ac + b^2)(2a^2 + ab + b^2 + bc)(a^2 + 2ac + b^2 + c^2)} = 0 \end{aligned}$$

であり、現代解と一致していることが確認できる。この問題は、計算方法によって違った式が答として出てきて、それが同じものであることの確認に手間取る、厄介な問題である。