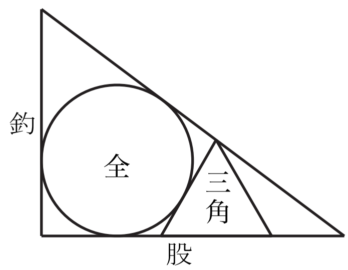
4.25 松岡多三郎

【問題文】



図のように、直角三角形 (釣股) 内に円と正三角形を入れる。直角をはさむ 2 辺のうち、釣の長さが 108 間 6 合、股の長さが 144 間 8 合であるとき正三角形の 1 辺の長さはいくらか。

【現代解】

図 49 のように、直角三角形 ABC の 3 辺を BC = a, CA = b, AB = c とし、円の中心を O、半径を r、辺 CA との接点を T とし、正三角形 DEF の 1 辺の長さを x とする。

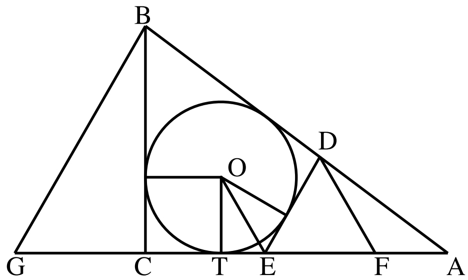


図 49: 松岡の問題

頂点 B を通り辺 DE と平行な直線が辺 CA の延長線と交わる点を G とする。このとき、△BGA と △DEA が相似であることを利用して x を求めることにする。

最初に △ABC は直角三角形なので

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1}$$

その内接円の半径 r は補助定理 2 により

$$r = \frac{a+b-c}{2} \tag{2}$$

である。また、$\angle$BGC = 60° なので、GC = $\frac{\sqrt{3}}{3}a$, BG = $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$ である。また、CT = OT = r と $\angle$OET = 60° により、TE = $\frac{\sqrt{3}}{3}r$ である。△BGA と △DEA が相似なので、BG : GA = DE : EA より、

$$\mathrm{GA}\cdot\mathrm{DE} = \mathrm{BG}\cdot\mathrm{EA}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a+b\right)x &= \frac{2\sqrt{3}}{3}a\left(b-r-\frac{\sqrt{3}}{3}r\right)\\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}a\left(b-\frac{3+\sqrt{3}}{6}(a+b-c)\right)\end{aligned}$$

これを整理して、

$$x = \frac{(3+\sqrt{3})c + (3-\sqrt{3})b - (3+\sqrt{3})a}{3(a+\sqrt{3}b)}a \tag{3}$$

である。

$a = 108.6, b = 144.8$ のとき $c = 181$ となるので（実は $a : b : c = 3 : 4 : 5$ である）、これを代入すると、

$$x = 53.000478\cdots \tag{4}$$

である。

【算額の解】

算額の答には、正三角形の 1 辺の長さは 53 間有奇とあり、式 (4) と一致する。また、術曰に述べられている式を整理すると、

$$x = \frac{2(b+c-a)}{\sqrt{3}\cdot\dfrac{b+c}{a}+3} \tag{5}$$

となっている。一見、式 (3) とは全く違って見えるが、両式の差を計算してみると、

$$\frac{(1+\sqrt{3})a(a^2+b^2-c^2)}{(a+\sqrt{3}b)(3a+\sqrt{3}b+\sqrt{3}c)}$$

となり、(1) よりこれは明らかに 0 である。この問題は、計算方法によって違った式が答として出てきて、それが同じものであることの確認に手間取る、厄介な問題である。式としては (3) より術曰の (5) の方が簡潔で美しい。