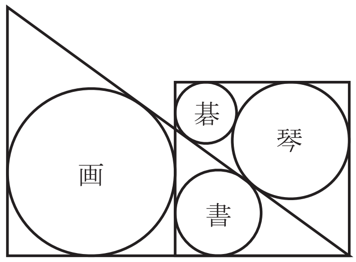
4.9　人川市太郎

【問題文】



図のように、直角三角形と正方形が交わってできる図形に内接する 4 個の円がある。正方形の 1 辺の長さが 70 寸 3 分 2 厘のとき、直角三角形の最小辺の長さを求めよ。

【現代解】

図 15 のように、正方形を ABCD、直角三角形を EFC とする。正方形の 1 辺の長さを a、直角三角形の高さを h とする。また、碁円の中心を O_1、半径を r_1、琴円の中心を O_2、半径を r_2、画円の中心を O_3、半径を r_3 とする。直線 AD と EC の交点を G とする。書円はこの問題には直接関係しないことに注意。

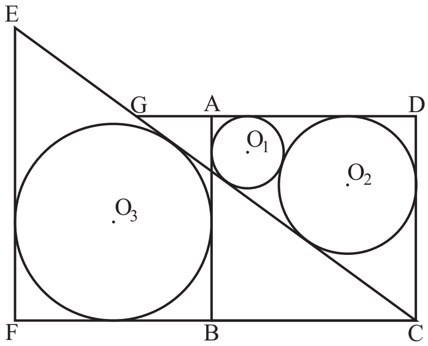


図 15: 人川の問題

補助定理 7(1) により、

$$a = (\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2 \tag{1}$$

である。補助定理 7(3) により

$$a = \frac{4\sqrt{r_1 r_2}}{2\sqrt{r_1 r_2} + r_1 - r_2}\, r_2 \tag{2}$$

である。この 2 式より、

$$(2\sqrt{r_1 r_2} + r_1 - r_2)(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2 = 4 r_2 \sqrt{r_1 r_2}$$

となる。ここで $\sqrt{r_1} = t\sqrt{r_2}$ とおくと、4 次方程式

$$(2t + t^2 - 1)(t + 1)^2 = 4t$$

$$t^4 + 4t^3 + 4t^2 - 4t - 1 = 0 \tag{3}$$

を得る。この方程式は数値計算をすると、2 つの実解を持つが、正の解は 1 つで $t \fallingdotseq 0.7246785882$ である。

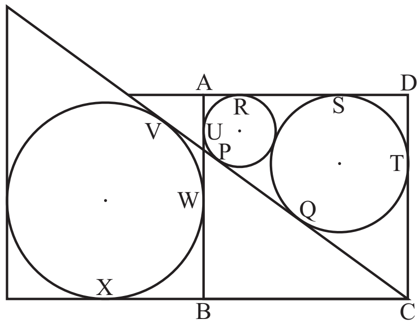


図 16: 接点

$\triangle$EFC と $\triangle$CDG は相似であることにより、

$$h = \frac{ar_3}{r_2} \tag{4}$$

である。

次に図 16 のように、接点 P, Q, . . . , X を定めるとき、

$$\mathrm{VC} = \mathrm{XC} = a + r_3$$

$$\mathrm{VP} = \mathrm{UW} = a - r_1 - r_3$$

$$\mathrm{PQ} = \mathrm{RS} = a - r_1 - r_2$$

$$\mathrm{QC} = \mathrm{TC} = a - r_2$$

なので、VC = VP + PQ + QC に代入することで

$$r_1 + r_2 + r_3 = a \tag{5}$$

となるが、式 (1) により

$$r_3 = 2\sqrt{r_1 r_2}$$

となり、これを式 (4) に代入すると

$$h = \frac{ar_3}{r_2} = \frac{2a\sqrt{r_1 r_2}}{r_2} = \frac{2a\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_2}} = 2at \tag{6}$$

となる。

従って、4 次方程式 (3) の解を式 (6) に代入して、$h \fallingdotseq 101.9188$ が求まる。

【算額の解】

算額の術曰には「4 次方程式 $7p^4 + 16p^3 - 6p^2 - 1 = 0$ の正の実数解 p を求め、$h = \left(\frac{1}{p^2} - 1\right)\frac{a}{2}$ とする」と書いてある。そこで、$4t = \frac{1}{p^2} - 1$ とおき、p の 4 次方程式を t の方程式に置き換えてみよう。

$$16p^3 = 1 + 6p^2 - 7p^4$$

この両辺を p^4 で割り

$$16\frac{1}{p} = \frac{1}{p^4} + 6\frac{1}{p^2} - 7$$

$\frac{1}{p^2} = 4t + 1$ を代入すると、

$$16\sqrt{4t+1} = (4t+1)^2 + 6(4t+1) - 7$$

両辺を 2 乗して整理すると、式 (3) が得られ、現代解と一致することが分かる。しかしながら、算額の答には、「100.0000 有奇」とあり、現代解の $h \fallingdotseq 101.9188$ と異なっている。計算式は合っているのだが、どこかで計算を間違えたものと思われる。