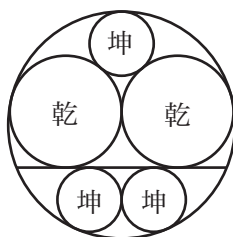


4.14 越智峯次

【問題文】



図のように、平円を弦によって2つに分けた下側に坤(こん)円2個、上側に乾(けん)円2個と坤円1個がある。坤円の直径の長さが与えられたとき、乾円の直径の長さを求めよ。

【現代解】

図26のように平円の中心をO、弦をAB、下側の2坤円の接点をC、2乾円の接点をD、ABとCDの交点をE、平円と上側の坤円の接点をFとし、乾坤円の中心を図のように O_1, O_2, O_3 とする。また、平円の半径を a 、坤円の半径を r 、乾円の半径を R とし、 $EF = b$ とおく。

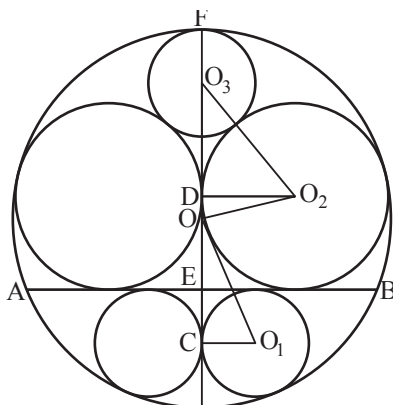


図 26: 越智の問題

直角三角形 OCO_1 に三平方の定理を用いると $(a - r)^2 = r^2 + (b - a + r)^2$ なので

$$a = \frac{(b + r)^2}{2b} \quad (1)$$

となる。直角三角形 DOO_2 に三平方の定理を用いると $(a - R)^2 = R^2 + (R + a - b)^2$ なので

$$2(b - 2R)a = (b - R)^2 \quad (2)$$

となる。最後は、直角三角形 O_3DO_2 に三平方の定理を用いると $(R + r)^2 = R^2 + (b - R - r)^2$ なので

$$b^2 - 2(R + r)b + R^2 = 0 \quad (3)$$

となる。これら3式の連立方程式を解けばよい。

(1)と(2)より a を消去すると、

$$2rb^2 + (r^2 - 4rR - R^2)b - 2r^2R = 0 \quad (4)$$

となる。(3)を $2r$ 倍した式と(4)の差を計算すると

$$b = \frac{2rR(r+R)}{5r^2 - R^2} \quad (5)$$

が得られるので、これを(3)に代入し、 $t = \frac{R}{r}$ とおいて整理すると5次方程式

$$t^5 + 4t^4 + 2t^3 - 8t^2 - 11t - 20 = 0 \quad (6)$$

を得る。

この後は数値計算に頼るしかなく、5次方程式(6)は数値解としてただ一つの実解

$$t \doteq 1.741912979 \quad (7)$$

を持つ。従って、

$$R \doteq 1.741912979 \times r$$

である。

【算額の解】

術曰には、10次方程式

$$((((((((((t-8)t+44)t+32)t-46)t-32)t-244)t-128)t-313)t-264)t-80=0$$

の解 t を用いて

$$\text{乾円直径} = t \times \text{坤円直径}$$

とすればよいと書いてある。しかし、この10次方程式を数値計算しても解(7)はでてこない。

そこで10次式の最初の $(t-8)$ を $(8-t)$ と置き換えてみると

$$\begin{aligned} & (((((((((8-t)t+44)t+32)t-46)t-32)t-244)t-128)t-313)t-264)t-80 \\ &= -(t^{10} - 8t^9 - 44t^8 - 32t^7 + 46t^6 + 32t^5 + 244t^4 + 128t^3 + 313t^2 + 264t + 80) \\ &= -(t^5 + 4t^4 + 2t^3 - 8t^2 - 11t - 20)(t^5 - 12t^4 + 2t^3 - 8t^2 - 11t - 4) \end{aligned}$$

のように因数分解ができて式(6)の左辺が因数としてでてくる。この10次方程式からは正しい解が求まる。

おそらく方程式を算額にまとめるときに式を写し間違えたものと思われる。