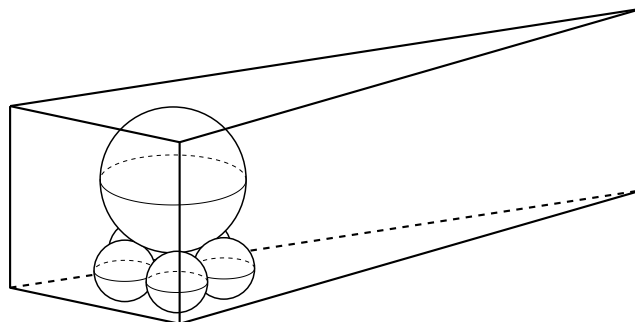


## 4.11 栗林佐太郎

### 【問題文】



図のように、三角柱の底面に接し互いに外接する5個の等球と、それらの上に乗り上面に接する1個の異球がある。ただし、等球1個と異球は三角形の最大辺を含む側面には接していない。底面の三角形の最大辺ではない2辺の長さが20寸、6寸6分のとき、三角柱の高さを求めよ。

### 【現代解】

図18は三角柱を真上から見たときの図である。他にも可能性がありそうだが、問題文に合う三角柱はこれ以外にはない。三角柱の底面  $\triangle ABC$  において、 $\angle ABC$  は正五角形の内角に等しいので  $108^\circ$  である。異球の中心を  $O$ 、半径を  $R$ 、等球の中心を  $O_1, O_2, \dots, O_5$ 、半径を  $r$  とする。また、3辺の長さを  $BC = a = 20$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c = 6.6$  とする。ここで、2辺  $a, c$  の比を

$$w = \frac{c}{a}$$

とおくことにする。この  $w$  は  $\triangle ABC$  の形（相似の範囲内で）を決定するパラメータである。また、 $\theta = 36^\circ$  とおき、計算には補助定理11の三角比を用いる。

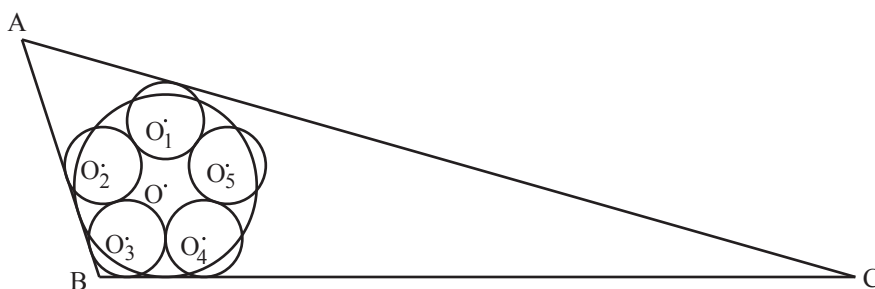


図18: 上から見た図

図19のように、正五角形  $O_1O_2O_3O_4O_5$  に外接し、 $\triangle ABC$  と相似の位置にある三角形を  $\triangle A_1O_3C_1$  とする。同様に、半径  $r$  の円  $O'$  に外接し、 $\triangle ABC$  と相似な三角形を  $\triangle A_2B_2C_2$  とする。また、3点  $A_1, O_3, C_1$  から  $\triangle ABC$  の辺に向けて引いている線分はすべて垂線とする。

このとき、図19での  $BO_3$  を対角線に持つ四角形と  $B_2O'$  を対角線に持つ四角形は合同で、同様に  $C_1C$  を対角線に持つ四角形と  $O'C_2$  を対角線に持つ四角形は合同であることから、

$$BC = O_3C_1 + B_2C_2 \quad (1)$$

が成り立つ。

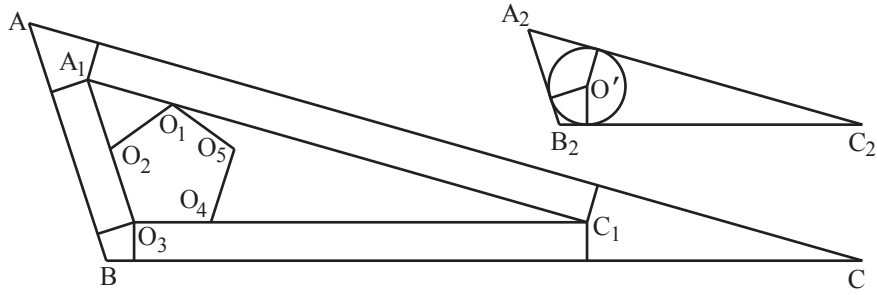


図 19: 相似な三角形

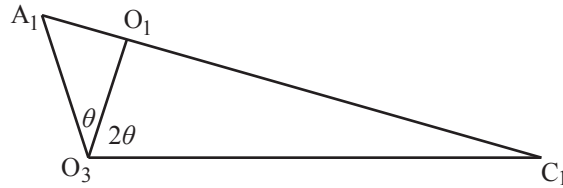


図 20:  $\triangle A_1O_3C_1$

次に図 20 を用いて、 $\triangle A_1O_3C_1$  について考える。線分  $O_3C_1$ ,  $C_1A_1$ ,  $A_1O_3$  の長さをそれぞれ  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  とする。補助定理 12 により、

$$(a_1 \sin 2\theta + c_1 \sin \theta)O_1O_3 = a_1c_1 \sin 3\theta \quad (2)$$

である。これに、 $O_1O_2 = 2r$  で  $O_1O_3 = 4r \cos \theta$  及び  $\sin 3\theta = \sin 2\theta$  であることを用いて整理すると、

$$4r(2a_1 \sin \theta \cos \theta + c_1 \sin \theta) \cos \theta = 2a_1c_1 \sin \theta \cos \theta$$

$$2r(2a_1 \cos \theta + c_1) = a_1c_1$$

ここで、 $c_1 = wa_1$  なので、

$$a_1 = \left(2 + \frac{4 \cos \theta}{w}\right)r \quad (3)$$

となる。

次に、 $\triangle A_2B_2C_2$  について考える。3 辺の長さを  $a_2, b_2, c_2$  とするとき、余弦定理より、

$$b_2^2 = a_2^2 + c_2^2 - 2a_2c_2 \cos 3\theta = a_2^2 + c_2^2 + 2a_2c_2 \cos 2\theta = (w^2 + 2w \cos 2\theta + 1)a_2^2$$

となる。そこで、

$$p = \sqrt{w^2 + 2w \cos 2\theta + 1} \quad (4)$$

とおくことで、 $b_2 = pa_2$  となる。また、 $\triangle A_2B_2C_2$  の面積  $S$  は

$$S = \frac{1}{2}a_2c_2 \sin 3\theta = \frac{1}{2}a_2c_2 \sin 2\theta$$

なので、補助定理 13 を使い内接円の半径  $r$  との関係式を求めると、

$$\frac{1}{2}(a_2 + b_2 + c_2)r = \frac{1}{2}a_2c_2 \sin 2\theta$$

$$(1 + p + w)r = a_2w \sin 2\theta$$

$$a_2 = \frac{1 + p + w}{w \sin 2\theta} r \quad (5)$$

となる。式 (1)、(3)、(5) をまとめると、

$$a = a_1 + a_2 = \left( 2 + \frac{4 \cos \theta}{w} + \frac{1 + p + w}{w \sin 2\theta} \right) r$$

$$r = \frac{1}{2 + \frac{4 \cos \theta}{w} + \frac{1 + p + w}{w \sin 2\theta}} a \quad (6)$$

である。

この式に  $a = 20$ ,  $w = \frac{33}{100}$  を代入して近似計算すると

$$r \doteq 1.0154978504 \quad (7)$$

となる。

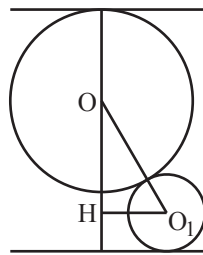


図 21: 切口

最後に三角柱の高さを計算しよう。図 21 は 2 点  $O$ 、 $O_1$  を含み底面に垂直な平面で切った切口である。異球の半径  $R$  は図 18 より、

$$R = r + r \cot \theta = r(1 + \cot \theta) \quad (8)$$

である。また、 $O_1H$  の長さは、図 18 の  $O_1O$  に相当するので、

$$O_1H = \frac{r}{\sin \theta}$$

となり、 $OH$  の長さは

$$OH = \sqrt{(R+r)^2 - O_1H^2} = r \sqrt{(2 + \cot \theta)^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta}} = r \sqrt{3 + 4 \cot \theta} \quad (9)$$

これらを用いると三角柱の高さ  $h$  は、 $h = r + OH + R$  を計算して、

$$h = \left( 2 + \cot \theta + \sqrt{3 + 4 \cot \theta} \right) r \quad (10)$$

である。この式と (6) を組み合わせると

$$h = \frac{2 + \cot \theta + \sqrt{3 + 4 \cot \theta}}{2 + \frac{4 \cos \theta}{w} + \frac{1 + p + w}{w \sin 2\theta}} a \quad (11)$$

が最終的な解である。

また、近似値を計算すると

$$h \doteq 6.2928057034r \doteq 6.3903306651 \quad (12)$$

となる。

【算額の解】

術曰は長文であるので、数式としてまとめてみる。まず、中斜 = BC = a、小斜 = AB = c とおく。説明のため、 $\theta = 36^\circ$  とする。

$$\begin{aligned} \text{角} &= a + c, \quad \text{元} = a - c \\ \text{氏}^1 &= \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \quad (= 2 \cos \theta) \\ \text{房} &= \sqrt{\text{氏} + \frac{3}{4}} \\ \text{心} &= \frac{\text{氏} + \frac{1}{2}}{\text{房}} \quad (= \cot \theta) \\ \text{尾} &= \frac{\text{心}}{\text{心} + 1} \quad (= \frac{1}{1 + \tan \theta}) \\ \text{箕} &= \sqrt{3 - \text{氏}} \quad (= 2 \sin \theta) \\ \text{斗} &= \text{箕} \cdot \text{元} \quad (= 2(a - c) \sin \theta) \\ \text{牛} &= \text{氏} \cdot \text{角} \quad (= 2(a + c) \cos \theta) \\ \text{女} &= \frac{\text{斗} + \text{牛} - \sqrt{\text{牛}^2 + \text{斗}^2}}{2} \\ \text{虚} &= \frac{(\frac{\text{女}}{\text{斗} - \text{女}} + \frac{1}{2}) \cdot \text{元} \cdot \text{尾}}{\text{氏}} \\ \text{危} &= \frac{\text{角} \cdot \text{房}}{\text{箕}} + \text{虚} \\ \text{高} &= \frac{(\sqrt{\text{心} + \frac{3}{4}} + 1 + \frac{\text{心}}{2}) \text{尾} \cdot a \cdot c}{\text{危}} \end{aligned}$$

術曰には「高」が答えであるとしめくくられている。これらの式の中で、「氏」から「箕」は角度が関係する値である。「女」の式中にある

$$\sqrt{\text{牛}^2 + \text{斗}^2} = 2\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos 3\theta}$$

は辺 AC の長さであり、「高」の中の

$$2(\sqrt{\text{心} + \frac{3}{4}} + 1 + \frac{\text{心}}{2}) = 2 + \cot \theta + \sqrt{3 + 4 \cot \theta}$$

は(10)で用いた式である。しかしながら、「牛」、「虚」、「危」についてはその式の意味するところがよく分からない。計算方法の違いなのか、計算間違いなのか不明である。術曰の式に具体的数値を入れて近似計算してみると「高 ≒ 6.31897」となる。この値は現代解で得られた(12)よりも少し小さい値である。

<sup>1</sup>この漢字は本来は「底」から「广」を取り除いた字であるが、ワープロの都合で「氏」で代用する。