【補足資料】

２次方程式、３次方程式の適尽諸級について

愛媛和算研究会　谷本賢治

１　はじめに

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots+a_nx^n=0$とする。

$xf'(x)=a_1x+2a_2x^2+3a_3x^3\cdots\cdots+na_nx^n=0$

$\dfrac{x^2}{2!}f''(x)=a_2x^2+3a_3x^3+\cdots\cdots+\dfrac{n(n-1)}{2}a_nx^n=0$

このとき

$\begin{cases} f(x)=0 \\ xf'(x)=0 \end{cases}$　から x を消去する方法を**適尽方級法**という。

$\begin{cases} f(x)=0 \\ \dfrac{x^2}{2!}f''(x)=0 \end{cases}$　から x を消去する方法を**適尽廉級法**という。

２　２次方程式のときの適尽方級法の求め方について

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2=0$ とする。

$xf'(x)=a_1x+2a_2x^2=0$

$\begin{cases} a_0+a_1x+a_2x^2=0 \cdots\cdots① \\ a_1x+2a_2x^2=0 \quad \cdots\cdots② \end{cases}$

① ×2−②から　　$2a_0+a_1x=0$ ……③

②から　　$a_1+2a_2x=0$ ……④

まとめると

$\begin{cases} 2a_0+a_1x=0\cdots\cdots③ \\ a_1+2a_2x=0\cdots\cdots④ \end{cases}$

③、④から x を消去する。

④$\times a_1-$③$\times 2a_2$ から

$a_1{}^2-4a_2a_0=0$ …… **適尽方級法**

$a_1{}^2-4a_2a_0$は、２次方程式の判別式になっている。

3　３次方程式のときの適尽方級法の求め方について

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=0$とする。

$xf'(x)=a_1x+2a_2x^2+3a_3x^3=0$

$$\begin{cases} a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=0\cdots\cdots① \\ a_1x+2a_2x^2+3a_3x^3=0\cdots\cdots② \end{cases}$$

①×３－②から、x^3 の項を消去すると

$3a_0+2a_1x+a_2x^2=0\cdots\cdots③$

②から、 $a_1+2a_2x+3a_3x^2=0\cdots\cdots④$

③×$3a_3$－④×a_2 から、 x^2 の項を消去すると

$(9a_0a_3-a_2a_1)+(6a_1a_3-2a_2)x=0\cdots\cdots⑤$

⑤×x＋③×$2a_2$－④×$2a_1$ から

$(6a_0a_2-2a_1)+(9a_0a_3-a_1a_2)x=0\ \cdots\cdots⑥$

まとめると

$$\begin{cases} (9a_0a_3-a_2a_1)+(6a_1a_3-2a_2{}^2)x=0\cdots\cdots⑤ \\ (6a_0a_2-2a_1{}^2)+(9a_0a_3-a_1a_2)x=0\cdots\cdots⑥ \end{cases}$$

⑤、⑥から x 消去する。

⑤×$(9a_0a_3-a_1a_2)$－⑥×$(6a_1a_3-2a_2)$から

$(9a_0a_3-a_1a_2)^2-(6a_1a_3-2a_2{}^2)(6a_0a_2-2a_1{}^2)=0$

すなわち

$27a_0{}^2a_3{}^2+4a_0a_2{}^3+4a_1{}^3a_3-18a_0a_1a_2a_3-a_1{}^2a_2{}^2=0$ …… 適尽方級法

３次方程式の判別式は、 $-27a_0{}^2a_3{}^2-4a_0a_2{}^3-4a_1{}^3a_3+18a_0a_1a_2a_3+a_1{}^2a_2{}^2$　である。

4　３次方程式のときの適尽廉級法の求め方について

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=0$とする。

$\dfrac{x^2}{2!}f''(x)=a_2x^2+3a_3x^3$

$$\begin{cases} a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=0\cdots\cdots① \\ a_2x^2+3a_3x^3=0\cdots\cdots② \end{cases}$$

①×3－② から、 x^3 を消去すると　$3a_0+3a_1x+2a_2x^2=0\ \cdots\cdots③$

②から　 $a_2x+3a_3x^2=0\cdots\cdots④$

③×$3a_3$－④×$2a_2$ から x^2 を消去する。

$9a_0a_3+(9a_1a_3-2a_2{}^2)x=0\ \cdots\cdots⑤$

②から $a_2+3a_3x=0$……⑥

まとめると

$$\begin{cases} 9a_0a_3+(9a_1a_3-2a_2{}^2)x=0 \cdots\cdots ⑤ \\ a_2+3a_3x=0 \cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$

⑤、⑥から x を消去する。

⑤ $\times 3a_3-$ ⑥ $\times(9a_1a_3-2a_2{}^2)$ から

$27a_0a_3{}^2-a_2(9a_1a_3-2a_2{}^2)=0$

すなわち

$27a_0a_3{}^2+2a_2{}^3-9a_1a_2a_3=0$……適尽廉級法

参考文献

［1］加藤平左エ門、算聖関孝和の業績、槇書店、1972