変式と適尽諸級法

藤井康生

1　はじめに

『開方飜変』に載せられている「適尽諸級法」について述べる．

適尽諸級法は何を目的に考えられたものであるのか．

加藤平左エ門著『算聖関孝和の業績』（槇書店）61 ページには「方級法以外は無意義に終り，これを基として行なった諸級替数は誤った結果に到達するわけである」と載せられているが，方級法以外は本当に無意義であるのか．

本稿ではどのようにして適尽諸級法を考えたのかについて考察する．

2　変式について

変式は n 次方程式 $f(x)$

方程式 $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n=0$ に対して微分法の記号を用いて表すと

$$f(x)=f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)+\frac{1}{2!}f''(\alpha)(x-\alpha)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x-\alpha)^n$$

である．3 次方程式の場合を計算してみる．

$$f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

とする．係数 a_0 は実級，a_1 は方級，a_2 は廉級，a_3 は隅級である

$$\begin{array}{rrrrl}
a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \underline{|\alpha} \\
 & a_3\alpha & a_3\alpha^2+a_2\alpha & a_3\alpha^3+a_2\alpha^2+a_1\alpha & \\
\hline
a_3 & a_3\alpha+a_2 & a_3\alpha^2+a_2\alpha+a_1 & a_3\alpha^3+a_2\alpha^2+a_1\alpha+a_0 & \\
 & a_3\alpha & 2a_3\alpha^2+a_2\alpha & & \\
\cline{1-3}
a_3 & 2a_3\alpha+a_2 & 3a_3\alpha^2+2a_2\alpha+a_1 & & \\
 & a_3\alpha & & & \\
\cline{1-2}
a_3 & 3a_3\alpha+a_2 & & &
\end{array}$$

$$f(\alpha)=a_3\alpha^3+a_2\alpha^2+a_1\alpha+a_0$$

$$f'(\alpha) = 3a_3\alpha^2 + 2a_2\alpha + a_1$$

$$\frac{1}{2!}f''(\alpha) = 3a_3\alpha + a_2$$

$$\frac{1}{3!}f'''(\alpha) = a_3$$

変式は方程式の商を研究するときに用いられた.
はじめに,『大成算経』巻之三変技, 替数より方程式が正の商をもつ場合をまとめておく.
最高次の係数は正とする.

○ 定数項（実級）が負であれば, 正の商を持つ. $(a_0 < 0)$

○ すべての項の係数が正であれば, 正の商を持たない. $(a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, \cdots, a_n > 0)$

○ 1 次の項の係数（方級）から 2 番目に高次の項の間に負の係数があれば, 正の商を持つ場合がある. また, 係数を符号は変えずに替えて正の商を持つようにすることができる.

○ 負の商を持つときも, 商を一商とし正の商を持つときと同様にする.

3 『開方飜変』適尽諸級法第三

3.1 平方適尽方級法

2 次方程式を $a_0 + a_1x + a_2x^2 = 0$ とするとき, $a_1^2 - 4a_0a_2 = 0$
これは $f(x) = 0, f'(x) = 0$ の終結式, $f(x) = 0$ の判別式に相当する.
変式では方級（2 次式であるので最高次から 2 番目の項）を 0 にする値を調べている.

3.2 立方適尽諸級法

3 次方程式を $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = 0$ とする.

立方適尽方級法

$$27a_0^2a_3^2 + 4a_0a_2^3 + 4a_1^3a_3 - 18a_0a_1a_2a_3 - a_1^2a_2^2 = 0$$

これは平方適尽方級法と同様 $f(x) = 0, f'(x) = 0$ の終結式, $f(x) = 0$ の判別式に相当する.

変式では方級を 0 にする値を調べている.

立方適尽廉級法

$$27a_0a_3^2 + 2a_2^3 - 9a_1a_2a_3 = 0$$

$x = y + \alpha,\ \alpha = -\dfrac{a_2}{3a_3}$ とする．

$$\begin{aligned} f(y - \frac{a_2}{3a_3}) &= f(-\frac{a_2}{3a_3}) + f'(-\frac{a_2}{3a_3})y + \frac{f''(-\frac{a_2}{3a_3})}{2}y^2 + \frac{f'''(-\frac{a_2}{3a_3})}{6}y^3 \\ &= \frac{27a_0a_3^2 - 9a_1a_2a_3 + 2a_2^3}{27a_3^2} + \frac{3a_1a_3 - a_2^2}{3a_3}y + a_3y^3 \\ &= \frac{3a_1a_3 - a_2^2}{3a_3}y + a_3y^3 \end{aligned}$$

$$f(-\frac{a_2}{3a_3}) = 0, \quad f''(-\frac{a_2}{3a_3}) = 0$$

変式では廉級（2 次式であるので最高次から 2 番目の項）を 0 にする値を調べている．

三乗方適尽諸級法以後も同様に考える．

方程式が正商または負商を持たないときに，１つの級の数を符号を変えないで絶対値を替えて正の商または負の商を持つようにすることを替数という．

適尽諸級法は替数に用いられる．

4　『開方飜変』諸級替数第四の例

$$3 + x - x^2 + x^3 = 0$$

$$(3 - 2x + x^2)(1 + x) = 0, \quad x = -1$$

負商（$x = -1$) を持つが正商を持たない．

実級, 方級, 廉級, 隅級の数の絶対値を替えて商を持つ範囲を求める．

（１）実級（定数項）の数を替える

$$a + x - x^2 + x^3 = 0, \quad a_0 = a > 0, a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 1$$

適尽廉級法　$27a_0a_3^2 + 2a_2^3 - 9a_1a_2a_3 = 0$

$$7 + 27a = 0,\ a = -0.259259 \text{ 強}$$

替数はできない．

適尽方級法　$27a_0^2a_3^2 + 4a_0a_2^3 + 4a_1^3a_3 - 18a_0a_1a_2a_3 - a_1^2a_2^2 = 0$

$$27a^2 + 14a + 3 = 0$$

方程式に商はなく，替数はできない．

（２）方級（1 次の項の係数）の数を替える

$3+bx-x^2+x^3=0,\ a_0=3,a_1=b>0,a_2=-1,a_3=1$

適尽廉級法　$27a_0a_3^2+2a_2^3-9a_1a_2a_3=0$

$79+9b=0,\ b=-8.777778$ 弱

替数はできない．

適尽方級法　$27a_0^2a_3^2+4a_0a_2^3+4a_1^3a_3-18a_0a_1a_2a_3-a_1^2a_2^2=0$

$231+54b-b^2+4b^3=0,\ b=-2.694396$ 弱 (他の商は虚数)

替数はできない．

（３）廉級（2 次の項の係数）の数を替える

$3+x+cx^2+x^3=0,\ a_0=3,a_1=1,a_2=c<0,a_3=1$

適尽廉級法　$27a_0a_3^2+2a_2^3-9a_1a_2a_3=0$

$81-9c+2c^3=0,\ c=-3.868872$ 弱 (他の商は虚数)

$c<-3.868872$　のとき正商をもつ．

適尽方級法　$27a_0^2a_3^2+4a_0a_2^3+4a_1^3a_3-18a_0a_1a_2a_3-a_1^2a_2^2=0$

$247-54c-c^2+12c^3=0,\ c=-3.25$(他の商は虚数)

$c<-3.25$　のとき正商をもつ．

（４）隅級（3 次の項の係数）の数を替える

$3+x-x^2+dx^3=0,\ a_0=3,a_1=1,a_2=-1,a_3=d>0$

適尽廉級法　$27a_0a_3^2+2a_2^3-9a_1a_2a_3=0$

$-2+9d+81d^2=0,$ 正の商は $d=0.111111$ 強

$0<d<0.111111$　のとき正商をもつ．

適尽方級法　$27a_0^2a_3^2+4a_0a_2^3+4a_1^3a_3-18a_0a_1a_2a_3-a_1^2a_2^2=0$

$-13+58d+243d^2=0,$ 正の商は $d=0.1409282$ 強

$0<d<0.1409282$　のとき正商をもつ．

関の適尽諸級法は，平方式（2 次式）の場合は適尽方級法，立方式（3 次式）の場合は適尽廉級法を用いて適尽方級法は用いない．三乗方式（4 次式）の場合は適尽下廉級を用いるが，適尽方級法，適尽上廉法を用いていない．これは変式の最高次の前の項を 0 とすることを考え，そのときの実級（定数項）が負になる範囲を考えている．この場合の実級（定数項）は $f(x), f^{(n-1)}(x)$ の終結式になり適尽諸級法にあたる． $f^{(n-1)}(x)$ は 1 次式になるので計算が簡単にできる．

平方式 $f'(-\frac{a_1}{2a_2}) = 0$ のとき $f(-\frac{a_1}{2a_2}) < 0$

立方式 $f''(-\frac{a_2}{3a_3}) = 0$ のとき $f(-\frac{a_2}{3a_3}) < 0$

三乗方式 $f'''(-\frac{a_3}{4a_4}) = 0$ のとき $f(-\frac{a_3}{4a_4}) < 0$

これは方程式（関数）の次数の高い項の方が商に与える影響が大きいことより，必要十分という概念がなかった当時（十分）条件の一つとして最高次の手前の項を 0 としたと思われる．

関孝和が間違えていたというより，求めている方針が異なっていたと思われる．その後，方程式の消去の方法の研究が進み，判別式が計算されるようになると適尽方級法のみが用いられるようになったと思われる．

参考文献

[1] 長田直樹, 関孝和編『開方飜変之法』について (II) —『開方飜変之法』で意図したこと—, RIMS 講究録別冊 B69 (2018), 49–64.