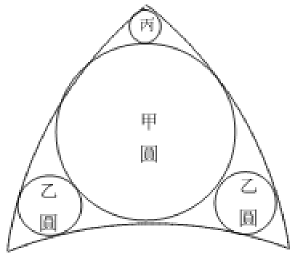
巻「黄」の巻末問題「所懸和霊大明神社算法」について

（１）「所懸和霊大明神社算法」問題

《現代訳》

「和霊大明神社に懸けたところの算法」

今有如圓以三等弧背圓甲圓其罅容乙圓與丙圓只云甲圓徑若干
乙圓徑若干問得丙圓徑術如何
答曰依左術得丙圓徑
術曰置乙圓徑四之名初自之名中置乙圓徑五之以減甲圓徑三段
餘自之名末以減中餘平方開之加初自之加中二段以除末乗甲圓
徑得丙圓徑合問



今、図のように甲円を囲む三つの等しい円弧がある。甲円との隙間に乙円と丙円を容れる。甲円の直径と乙円の直径が分かったとき、丙円の直径を求める方法を述べよ。

答　丙円の直径は左の術に依って得られる。

術曰　甲円直径、乙円直径、丙円直径をそれぞれ甲、乙、丙とする。

$4乙=初$、$初^2=中$、$(3甲-5乙)^2=末$　と名付ける。

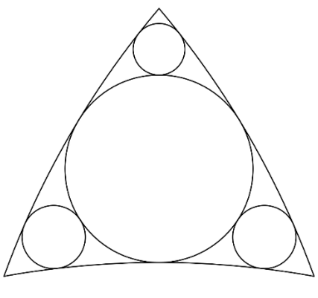
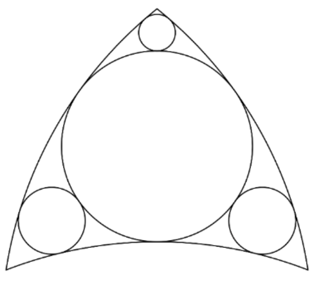
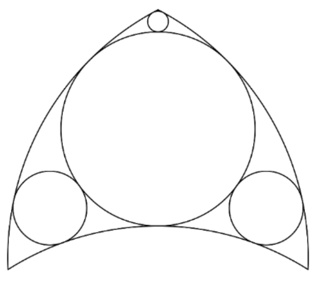
$$丙=\frac{甲末}{\left(初+\sqrt{中-末}\right)^2+2中}$$

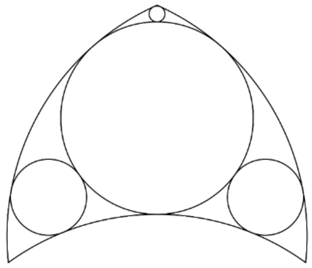
すなわち

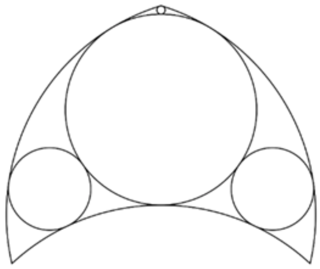
$$丙=\frac{甲(3甲-5乙)^2}{\left(4乙+\sqrt{16乙^2-(3甲-5乙)^2}\right)^2+32乙^2}$$

（２）図形について

愛媛大学名誉教授平田浩一先生が作成された、円弧のふくらみをパラメータとしたコンピュータグラフィックスによる正確な図を紹介する。





（３）解義の概要

弧を表す円を大円とする。大円、甲円、乙円、丙円の直径を大、甲、乙、丙とし、その半径を大半、甲半、乙半、丙半とする。また、半に揃えるため他の長さも半とする。

① 大円の直径の求め方

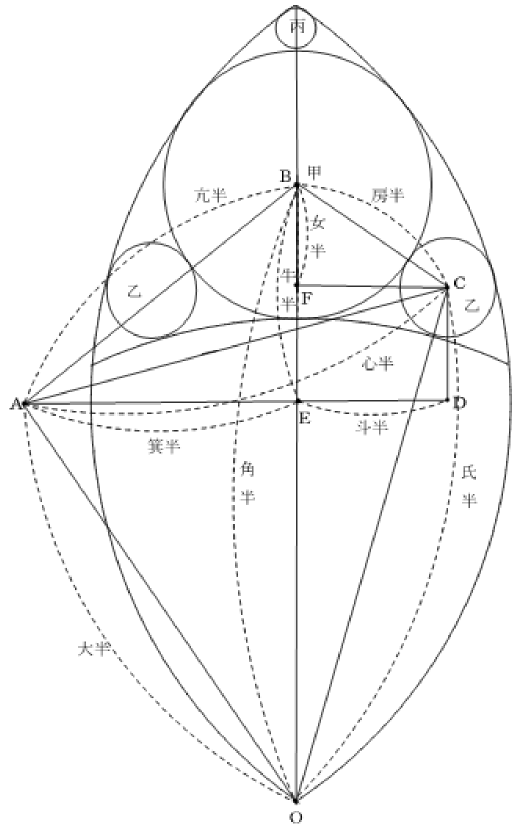
大円、甲円、乙円の内接、外接から

角＝大＋甲、亢＝大－甲、氐＝大＋乙、房＝甲＋乙、心＝大－乙 ………(1)

△ＡＣＤから　$心^2=(牛-女)^2+(箕+斗)^2$ ………(2)

△ＡＢＥから　$箕^2=亢^2-牛^2$ ………(3)

△ＢＣＦから　$斗^2=房^2-女^2$ ………(4)



(2)を中心に据えて大円の直径を求める。

(2)を変形すると

$心^2=(牛-女)^2+(箕+斗)^2=(牛-女)^2+箕^2+2箕斗+斗^2$

$心^2-(牛-女)^2-箕^2-斗^2=2箕斗$ ………(5)

牛、女、箕、斗を大、甲、乙で表す。

次に、△ＯＢＣ、△ＯＡＢに和算の余弦定理を使う。

$2角女=角^2+房^2-氐^2$ ………(6)

$2角牛=角^2+亢^2-大^2$ ………(7)

(6)、(7)に(1)を代入して整理すると

$角女=(大+甲)甲-(大-甲)乙$

$角牛=甲^2+\frac{大^2}{2}$

(3)、(4)に角^{2}をかけ、(1)を代入して、角^{2}箕^2、角^{2}斗^{2}を大、甲、乙で表す。

$角^2箕^2=角^2(亢^2-牛^2)=角^2亢^2-角^2牛^2=\frac{3大^4}{4}-3甲^2大^2$

$角^2斗^2=角^2(房^2-女^2)=角^2房^2-角^2女^2=4(大+甲)甲乙大+4甲大乙^2$

さらに、(5)に角^{2}をかけると

$角^2心^2-(角牛-角女)^2-角^2箕^2-角^2斗^2=2角^2箕斗$ ………(8)

よって、(1)及び各式を(8)の左辺に代入すると大、甲、乙で表される。

$$-8甲^2乙大-5大^2甲乙+3大^2甲^2+3大^3甲-3大^3乙=2角^2箕斗 \quad \cdots\cdots\cdots(9)$$

(9)の両辺を大で割り平方する。

$$(-8甲^2乙-5大甲乙+3大甲^2+3大^2甲-3大^2乙)^2=\left(\frac{2角^2箕斗}{大}\right)^2 \quad \cdots\cdots\cdots(10)$$

(10)の右辺の分子は

$$4角^4箕^2斗^2=4(角^2斗^2)(角^2箕^2)=4\{4(大+甲)甲乙大+4甲大乙^2\}\left(\frac{3大^3}{4}-3甲^2大^2\right)$$

よって、(10)の右辺は

$$\frac{4角^4箕^2斗^2}{大^2}=12大^4甲乙+12甲^2乙大^3+12甲乙^2大^3-48甲^3乙大^2-48甲^4乙大-48甲^3乙^2大$$

$$\begin{aligned}左辺&=(-8甲^2乙-5大甲乙+3大甲^2+3大^2甲-3大^2乙)^2\\&=64甲^4乙^2+80甲^3乙^2大-48甲^4乙大-48大^2甲^3乙+48大^2乙^2甲^2+25大^2乙^2甲^2-30大^2甲^3乙\\&\quad-30大^3甲^2乙+30大^3乙^2甲+9甲^4大^2+18大^3甲^3-18大^3甲^2乙+9大^4甲^2-18大^4甲乙\\&\quad+9大^4乙^2\end{aligned}$$

よって、(10)を整理すると

$$\begin{aligned}&64甲^4乙^2-30甲^3大^2乙+9大^2甲^4+18大^3甲^3+9大^4乙^2+9大^4甲^2+128甲^3乙^2大\\&-30大^4甲乙+18大^3乙^2甲+73大^2甲^2乙^2-60大^3甲^3乙=0\end{aligned}$$

ここで　$73大^2甲^2乙^2=64大^2甲^2乙^2+9大^2甲^2乙^2$　と変形すると

$$\begin{aligned}&64甲^2乙^2(大^2+2大甲+甲^2)-30大^2甲乙(大^2+2大甲+甲^2)\\&+9甲^2大^2(大^2+2大甲+甲^2)+9大^2乙^2(大^2+2大甲+甲^2)=0\end{aligned}$$

したがって

$$64甲^2乙^2(甲+大)^2-30甲乙(甲+大)^2大^2+9甲^2(甲+大)^2大^2+9乙^2(甲+大)^2大^2=0$$

$(甲+大)^2$で割り大について整理すると

$$64甲^2乙^2+(9甲^2-30甲乙+9乙^2)大^2=0$$

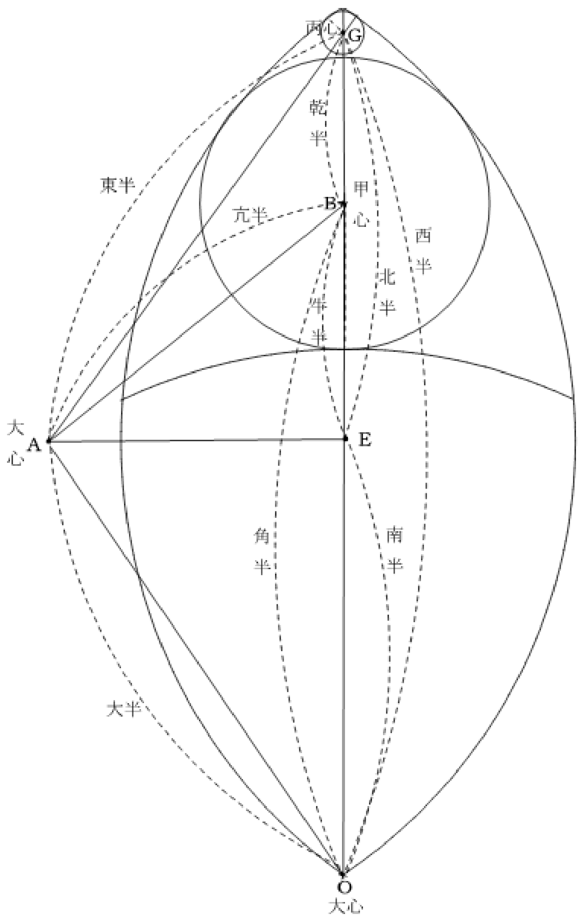
よって、大円の直径は

$$大=\frac{8甲乙}{\sqrt{-9甲^2+30甲乙-9乙^2}}$$

$-9甲^2+30甲乙-9乙^2=天$　と名付けると

$$大=\frac{8甲乙}{\sqrt{天}} \quad \cdots\cdots\cdots(11)$$

② 丙円の直径の求め方



西＝丙＋２甲＋大 ………(12)

西の２次方程式を二つ作る。

図から

東＝大－丙 ………(13)

北に着目して

北＝甲＋牛＋丙 ………(14)

△ＯＡＧに余弦定理を使う。

２北西＝西^2＋東^2－大^2 ………(15)

(13)を代入して

２北西＝西^2－２大丙＋丙^2 ………(16)

(16)に角をかけて

２北西角＝西^{2}角－２大丙角＋丙^{2}角 ………(17)

ここで 北西角＝(北角)西 と考えて、

もう一つの北西角の式を作る。

(14)に２角をかけると

２角北＝２角甲＋２角牛＋２角丙

２角甲の角だけに(1)の角＝大＋甲を代入、また、大を求める時に導いた「角牛」の式

$$角牛＝甲^2＋\frac{大^2}{2}$$

を代入して整理すると　２北角＝２大甲＋２丙角＋４甲^2＋大^2

西をかけると　２北西角＝２大甲西＋２丙角西＋４甲^{2}西＋大^{2}西 ………(18)

(17)、(18)から、西について整理すると

（２大丙角－丙^{2}角）＋（２大甲＋大^2＋４甲^2＋２丙角）西－角西^2＝０ ………(19)

もう一つ西の２次方程式を作る。

今度は、南に着目して北と同様な考え方で導く。

△ＯＡＧに余弦定理を使う。

２南西＝西^2＋大^2－東^2

(13)東＝大－丙 を代入して

２南西＝西^2＋２大丙－丙^2

両辺に角をかけると

２南西角＝西^{2}角＋２大丙角－丙^{2}角 ………(20)

ここで 南西角＝(南角)西 と考えて、もう一つの南西角をつくる。

△ＯＡＢに余弦定理を使うと

$2南角=角^2+大^2-亢^2$

(1)の角＝大＋甲、亢＝大－甲 を代入すると

$2南角=大^2+4大甲$

西をかけると

$2南西角=大^2西+4大甲西$ ………(21)

(20)、(21)から西について整理すると

$(2大丙角-丙^2角)-(大^2+4甲大)西+角西^2=0$ ………(22)

西の２次方程式が二つ(19)、(22)が導かれたから

$\frac{1}{2}\{(19)+(22)\}$ を計算すると $(2大丙角-丙^2角)+(-甲大+2甲^2+丙角)西=0$

この式に、(12)西＝丙＋２甲＋大、(1)角＝大＋甲 を代入して丙について整理する。

$(-大^2甲+4甲^3)+(4甲^2+4甲大+3大^2)丙=0$

(11)の$大=\frac{8甲乙}{\sqrt{天}}$ を代入して整理すると

$(-16甲乙^2+甲天)+(天+8乙\sqrt{天}+48乙^2)丙=0$

$天=-9甲^2+30甲乙-9乙^2$ を前項のみに代入すると

$-甲(9甲^2-30甲乙+25乙^2)+(天+8乙\sqrt{天}+48乙^2)=0$

$3甲-5乙=地$ $4乙+\sqrt{天}=人$ と名付ける。

$-甲地^2+(人^2+32乙^2)丙=0$

よって

$$丙=\frac{甲地^2}{人^2+32乙^2}$$

甲、乙で表すと

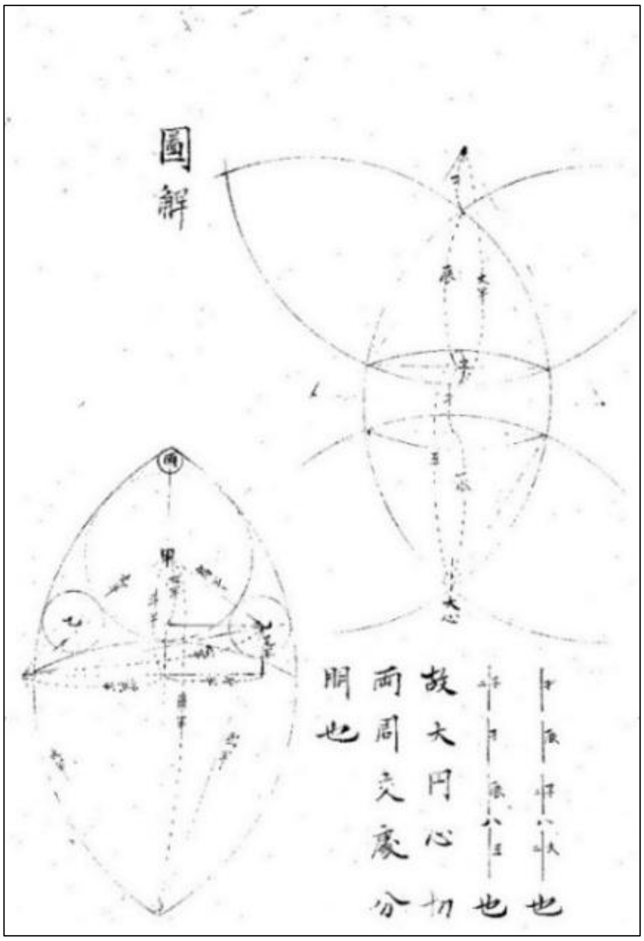
$天=-9甲^2+30甲乙-9乙^2=16乙^2-(9甲^2-30甲乙+25乙^2)=(4乙)^2-(3甲-5乙)^2$

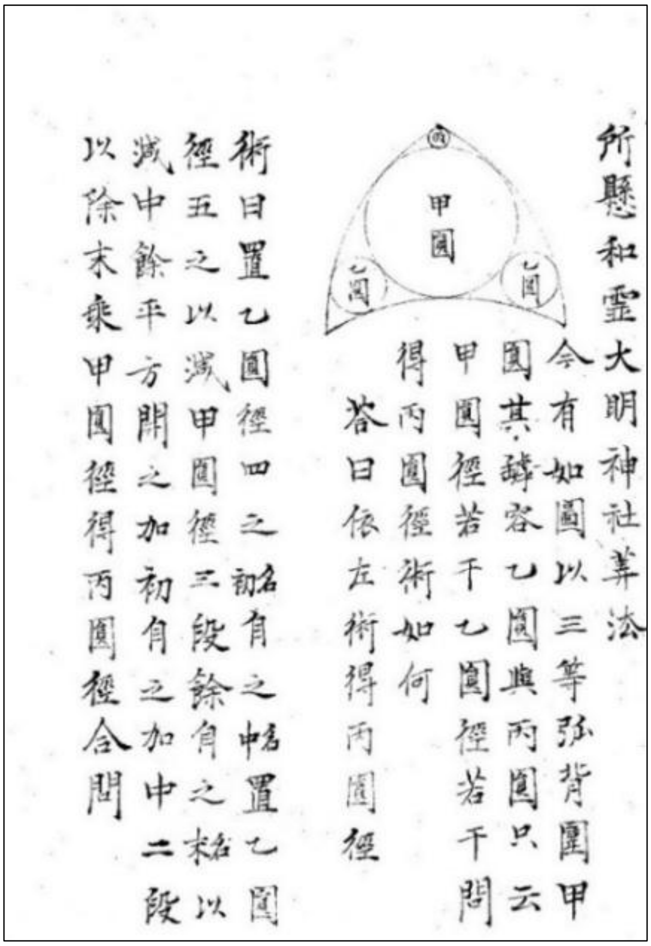
したがって

$$丙=\frac{甲(3甲-5乙)^2}{\left(4乙+\sqrt{(4乙)^2-(3甲-5乙)^2}\right)^2+32乙^2}$$

これは術文に合っている。

【所懸和霊大明神社筭法】





【和霊神社】

和霊大明神社は、愛媛県宇和島市和霊町 1451 にある和霊神社である。交通アクセスは、ＪＲ四国予讃線の終着駅宇和島駅から徒歩約７分である。

『愛媛県史 民俗 上』（愛媛県史編さん委員会、愛媛県、1983 年）から紹介する。

和霊神社の祭神は、宇和島藩家老山家清兵衛公頼である。山家清兵衛は伊達政宗の家臣であったが、1614（慶長 19）年、政宗の庶長子秀宗が、伊予国宇和郡十万石の領主になるとき、民政・財政担当総奉行に抜擢されて若い秀宗を補佐した。

しかし、清兵衛の政策に対する反発や嫉妬する藩士が藩主秀宗に讒訴し、1620（元和６）年６月末に暗殺される。諸説があるが、藩主伊達秀宗による上意討ちともいわれる。

山家清兵衛の死後、1632（寛永９）年８月、正眼院で秀宗夫人の３回忌法事が営まれたとき、大風で本堂の梁が落ち殺害に関与した者が圧死する異変が起った。この事件は山家の霊の祟りによるものと喧伝され、また、山家の死後に頻発した天災地変などの因も祟りとみなされた。そのため、山家の御霊を鎮静化するためにその霊を祀りこめるために、秀

宗が 1653（承応２）年に創建し、山頼和霊神社と名付けた。時と共に御霊信仰の側面が薄れて守護神信仰に傾斜する経過をたどる。1728（宝暦 13）年５月 23 日、京都吉田家から大明神号が許され、祭神を和霊大明神社と号した。

また、和霊神社は守護神信仰としての名が高まり、分霊を祀る神社が四国・中国地方を中心に日本各地に 159 社ある。

1945（昭和 20）年に宇和島空襲で焼失したが、1957（昭和 32）年に再建された。

毎年７月 23 日・24 日の夏の大祭は「和霊さま」と親しく呼ばれ、愛媛県の夏の風物詩になっている。