「所懸和霊大明神社筭法」現代解について

平田　浩一

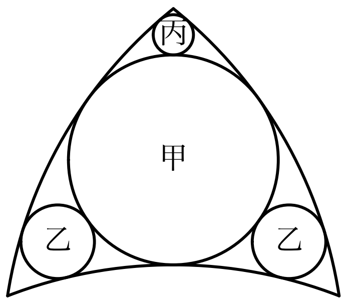
2023 年 7 月 6 日（改訂版）

令和 3 年 8 月 1 日の愛媛和算研究会で発表した資料の改訂版である。式 (1) を導くときに、以前は六斜術を用いたのであるが、それを算変座標に置き換えたのがこの資料である。

1　問題

この問題は谷本 [1] に載っている問題である。

今有如圖以三等弧背圍甲圓其罅容乙圓與丙圓只云甲圓徑若干乙圓徑若干問得丙圓徑術如何



今、図のように甲円を囲む三つの等しい円弧がある。甲円との隙間に乙円と丙円を容れる。甲円の直径と乙円の直径が分かったとき、丙円の直径を求める方法を述べよ。

この問題の解法としては、算変座標の半径公式（[3] 定理 6）とスチュワートの定理（[2] 補題 20）を用いると見通しがよい。その 2 つの公式は定理として付録にまとめている。

2　現代解

図 1 のように、3 つの等しい円弧を $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$、$\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$、$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ とする。このとき、$\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形である。甲円の半径を r_a、乙円の半径を r_b，丙円の半径を r_c とし、3 つの等しい円弧の半径を R とする。

最初に算変座標を用いた計算をする。基準 3 円 c_1, c_2, c_3 をつぎのように選ぶ。円弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ を c_1, 甲円 を c_2、右側の乙円を c_3 とし、向きはすべて反時計回りとする。このとき基準 3 円は互いに有向外接しているので基準距離は $(1, 1, 1)$ である。基準 3 円の符号つき半径はそれぞれ R, r_a, r_b である。

つぎに、円弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ を c とし、向きは時計回りとする。このとき c の符号つき半径は $-R$ である。図 2 のように、弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ と弦 BC のなす弓形と弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ と弦 AC のなす弓形とは合同なので、弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ と弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ のなす角

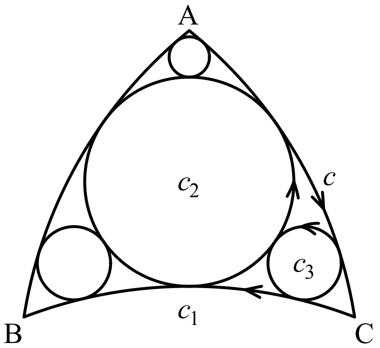


図 1　算変座標を用いる計算

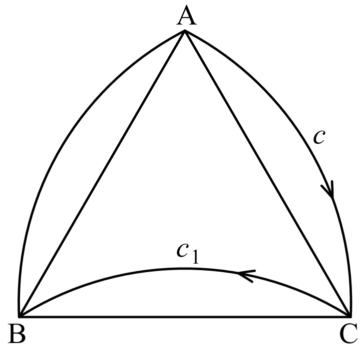


図 2　算変座標を用いる計算

は弦 BC と弦 AC のなす角に等しい。従って向きも考慮すると c_1 と c のなす角は 120° であることになり

$$s(c_1, c) = -\cos 120^\circ = \frac{1}{2}$$

となる。また c が c_2, c_3 に有向外接することから、c の算変座標は $[\frac{1}{2}, 1, 1]$ となる。

基準 3 円 c_1, c_2, c_3 と c に半径公式を適用すると、

$$p = \frac{1}{2}R(r_a + r_b) + r_a(r_b + R) + r_b(R + r_a) = \frac{1}{2}(4r_a r_b + 3r_a R + 3r_b R)$$
$$q = 3r_a r_b R(r_a + r_b + R)$$

となるので

$$\begin{aligned} p^2 - 4q &= \frac{1}{4}(4r_a r_b + 3r_a R + 3r_b R)^2 - 12r_a r_b R(r_a + r_b + R) \\ &= \frac{1}{4}\left(16r_a^2 r_b^2 + 9r_a^2 R^2 + 9r_b^2 R^2 - 24r_a^2 r_b R - 24r_a r_b^2 R - 30r_a r_b R^2\right) \end{aligned}$$

となる。半径公式の 2 次方程式に、これらの式と c の符号つき半径が $r = -R$ であることを代入すると

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}\left(16r_a^2 r_b^2 + 9r_a^2 R^2 + 9r_b^2 R^2 - 24r_a^2 r_b R - 24r_a r_b^2 R - 30r_a r_b R^2\right)R^2 \\ &+ 2(4r_a r_b + 3r_a R + 3r_b R)r_a r_b R^2 + 4r_a^2 r_b^2 R^2 = 0 \end{aligned}$$

となり、これを整理することで

$$(30r_a r_b - 9r_a^2 - 9r_b^2)R^2 = 64r_a^2 r_b^2$$

を得る。ここで

$$w = 30r_a r_b - 9r_a^2 - 9r_b^2 \tag{1}$$

とおくことで

$$R = \frac{8r_a r_b}{\sqrt{w}} \tag{2}$$

となる[*1]。

図 3 のように、弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ の中心を P、弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ の中心を Q、甲円の中心を K、丙円の中心を L とする。円弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$（円 P）は円弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$（円 Q）を点 C を中心として 60° 回転させたものなので、△QPC は正三角形であり、PQ = PC = R である。4 点 P, Q, K, L 間の距離は

$$\mathrm{QL} = R - r_c, \quad \mathrm{QK} = R - r_a, \quad \mathrm{PQ} = R, \quad \mathrm{KL} = r_a + r_c, \quad \mathrm{PK} = R + r_a,$$

[*1] $r_a < 3\,r_b$ のとき $w > 0$ となる。

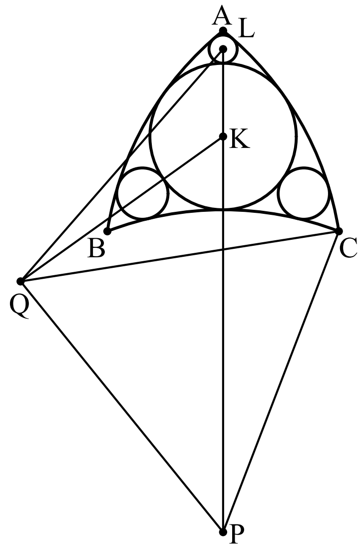


図 3　スチュワートの定理を用いる計算

である。そこで、三角形 QPL と辺 PL 上の点 K にスチュワートの定理を用いると

$$(R-r_c)^2(R+r_a)+R^2(r_a+r_c)=(R+2r_a+r_c)\left\{(R-r_a)^2+(r_a+r_c)(R+r_a)\right\}$$

となり、これを整理すると

$$(3R^2+4Rr_a+4r_a^2)r_c-R^2r_a+4r_a^3=0$$

となり、

$$r_c=\frac{R^2r_a-4r_a^3}{3R^2+4Rr_a+4r_a^2} \tag{3}$$

となる。式 (2) を (3) に代入すると

$$r_c=\frac{\dfrac{64r_a^3r_b^2}{w}-4r_a^3}{\dfrac{192r_a^2r_b^2}{w}+\dfrac{32r_a^2r_b}{\sqrt{w}}+4r_a^2}$$

この分母分子に $\dfrac{w}{4r_a^2}$ をかけて整理することで、

$$\begin{aligned} r_c&=\frac{16r_ar_b^2-r_aw}{48r_b^2+8r_b\sqrt{w}+w}=\frac{16r_ar_b^2-r_a(30r_ar_b-9r_a^2-9r_b^2)}{48r_b^2+8r_b\sqrt{w}+w}\\ &=\frac{9r_a^3-30r_a^2r_b+25r_ar_b^2}{(4r_b+\sqrt{w})^2+32r_b^2}=\frac{r_a(3r_a-5r_b)^2}{(4r_b+\sqrt{w})^2+32r_b^2}\end{aligned}$$

となる。

以上をまとめることで、解

$$\begin{aligned} w&=30r_ar_b-9r_a^2-9r_b^2\\ r_c&=\frac{r_a(3r_a-5r_b)^2}{(4r_b+\sqrt{w})^2+32r_b^2}\end{aligned}$$

が得られる。

3　付録

定理 1（互いに接する基準 3 円の半径公式）　基準距離が $(1, 1, 1)$ である基準 3 円を E^2 上の 3 有向円 c_1, c_2, c_3（符号つき半径はそれぞれ r_1, r_2, r_3）とする。E^2 上の有向円 c の算変座標 $[s_1, s_2, s_3]$ が与えられたとき、円 c の符号つき半径 r は 2 次方程式

$$(p^2 - 4q)r^2 - 4pr_1r_2r_3r + 4r_1^2r_2^2r_3^2 = 0$$

で求まり、解の公式は

$$r = \frac{2r_1r_2r_3}{p \pm 2\sqrt{q}}$$

である。ここで、

$$p = r_1(r_2 + r_3)s_1 + r_2(r_3 + r_1)s_2 + r_3(r_1 + r_2)s_3$$
$$q = r_1r_2r_3(r_1 + r_2 + r_3)(1 + s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_1)$$

とする。

定理 2（スチュワートの定理）　$\triangle$OAB の辺 AB 上の任意の点を P とし、OA $= a$、OB $= b$、AP $= c$、PB $= d$、OP $= x$、とする。このとき、

$$a^2d + b^2c = (c + d)(x^2 + cd)$$

が成り立つ。

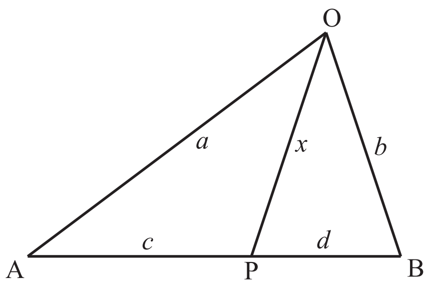


図 4　スチュワートの定理

参考文献

[1] 谷本賢治,『算法雑題答術』図形問題を読み解いて — 巻「黄」巻末問題徳久知弘作「所懸和霊大明神社算法」について —, 数学史研究, 239 (2021), 74–88.

[2] 平田浩一・谷本賢治編著、「愛媛の算額研究 〜現代解法を通して〜」、愛媛和算研究会、2017

[3] 平田浩一, 算変法不変式がつくる座標系について, 松山大学論集, 34-1 (2022), 57–103.