# 大西佐兵衛『雑題』第 6 巻の現代解

原本博史 *

2022 年 12 月 26 日

## 1 はじめに

大西佐兵衛「雑題」(愛媛県立図書館蔵) の現代解について、第 6 巻の問題全 15 問のうち、題意が不明の第 5 問を除く 14 問の現代解を作成した。

本稿では、これまでの和算研究会で発表済みの第 7 問と第 8 問以外の 12 問について作成した現代解をまとめている。なお、この解答作成中にいくつかの問題が精要算法と同じ問題であることがわかったため、田部井勝信氏の著書 [6] に掲載されている問題番号を該当の問題に付記している。

## 2 問題とその現代解

以下、「問題」「答曰」「術文」は愛媛和算研究会作成の「雑題」現代語訳による。いくつかの誤記と思われる内容については、該当する問題中でその旨を指摘している。

問題 6-1

今、金 8 両を 2 年賦として、これを貸す。毎年金 5 両を返済するとき年利はいくらか。

**答曰** 年利 1 割 6 分 2 厘 5 毛 9 糸 1 忽 有奇

**術文** 現代語訳では省略されている。

**現代解** $a$ を年利とする。1 年目に 5 両を返済した後の残高は $8(1+a)-5$ である。また、2 年目に 5 両を返済すると完済しているので等式

$$(8(1+a)-5)(1+a)-5=0$$

が成り立つ。$a>0$ に注意すると解の公式より

$$a=\frac{11+\sqrt{185}}{16}=0.162591906\cdots$$

を得る。

* 愛媛大学データサイエンスセンター, haramoto@ehime-u.ac.jp

**補足** この問題は精要算法 巻之中 第 12 問と同一問題である。そこでは平方根を用いず四則演算のみで年利を求める方法が紹介されている。

問題 6-2

今、金 100 両を 5 年賦で貸す。毎年金 29 両返済するとき、年利はいくらか。

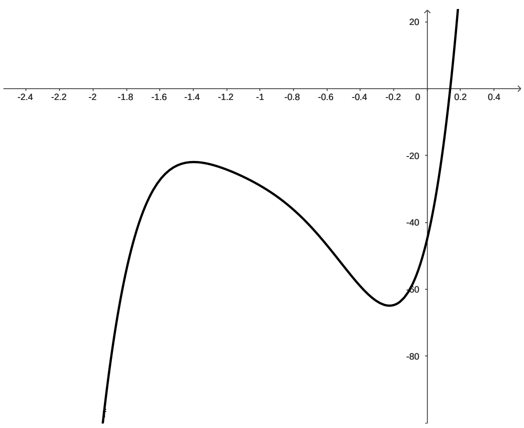
**答曰** 年利 1 割 3 分 8 厘 1 毛 6 糸 5 忽 有奇

**術文** 現代語訳では省略されている。

**現代解** $a$ を年利とすると、問題 6-1 と同様にして $a$ に関する 5 次方程式

$$100a^5 + 471a^4 + 855a^3 + 710a^2 + 210a - 45 = 0$$

を得る。このとき関数 $f(a) = 100a^5 + 471a^4 + 855a^3 + 710a^2 + 210a - 45$ の概形は以下の図のとおりである。




これより区間 $(0.1, 0.2)$ の間に唯一の実数解を持つことがわかる。数値解法によってこの方程式の解を求めると

$$a = 0.138165029\cdots$$

となることがわかる。

問題 6-3

今、若干ある銀を分けて、ある人数の人に与える。只云う それぞれに与える銀の差は 7 分の 3 である。又云う 最後の人の取る量を若干として、最初の人の取る銀の量の術を問う。

**答曰** 左術 (術文) の如し

**術文** $\dfrac{3}{7} = \text{天}$ とし、$1 - \text{天} = \dfrac{4}{7}$

$\dfrac{4}{7} \times$ (最後の人の取銀) $+$ 天 $\times$ (全体の銀の量) $=$ 最初の人の銀の量

**現代解** 「銀の差は 7 分の 3 である」と書かれている部分は、公差ではなく公比の意味で考えて解答を作成している。

全体の銀の量を $t$, 人数を $n$, 1 人目の取銀を $a$, $n$ 人目の取銀を $b$ とする。問題の条件より $k$ 人目の取銀は $a\left(\frac{3}{7}\right)^{k-1}$ で、特に $b=a\left(\frac{3}{7}\right)^{n-1}$ となる。

以上より

$$t=\sum_{k=1}^{n}a\left(\frac{3}{7}\right)^{k-1}=a\frac{1-\left(\frac{3}{7}\right)^{n}}{1-\frac{3}{7}}=\frac{7}{4}a-\frac{7}{4}a\left(\frac{3}{7}\right)^{n}=\frac{7}{4}a-\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{7}a\left(\frac{3}{7}\right)^{n-1}=\frac{7}{4}a-\frac{3}{4}b$$

を得る。この式を $a$ について解くと

$$a=\frac{4}{7}t+\frac{3}{7}b$$

を得る。天の値が異なっているが、術文と類似の式となっている。

問題 6-4

今、正方形が数知れず有り、その面積は若干、その正方形の一辺の和若干、その辺の各差は $\frac{2}{5}$ のとき、最初の正方形の一辺の長さ得る術を問う。

**答曰** 左 (術文) の如し

**術文** $\frac{2}{5}=$ 天、$(1-\text{天})=\frac{3}{5}$ とし、$\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^{2}\right)\times$ 積和 $=$ 地、方面和 $\times$ 天 $=$ 人 とする。

$\frac{\text{人}^{2}+\text{地}}{\text{人}}\times\frac{1}{2}=$ 首方面

**現代解** 「その辺の各差は $\frac{2}{5}$」と書かれている部分も公差ではなく公比を考える。

最初の正方形の一片の長さを $a$, 辺の差を $r$, 正方形の枚数を $n$, 正方形の面積の総和を $s$, 正方形の辺の長さの総和を $l$ とする。問題の条件より

$$s=\sum_{i=0}^{n-1}(ar^{i})^{2}=\frac{1-r^{2n}}{1-r^{2}}a^{2},\quad l=\sum_{i=0}^{n-1}(ar^{i})=\frac{1-r^{n}}{1-r}a$$

が成り立つ。特に後者の式より $r^{n}=1-\frac{l}{a}(1-r)$ が得られる。これを前者の右辺に代入して整理すると

$$s=\frac{2al(1-r)-(l(1-r))^{2}}{1-r^{2}}\qquad\therefore a=\frac{(1-r^{2})s+(l(1-r))^{2}}{2l(1-r)}.$$

これは術文の式と類似の式である (術文における天の値が異なっている)。

問題 6-6

今、その数の分からない物がある。只云う その物の数を奇数 1,3,5,7,9 で減じた数を法とし、物の数を法で除すと商 9、余り 1、又云う 物の数を偶数 2,4,6,8 で減じた数を法とし、物の数を法で除すと商 3、余り 4 となる。物の数はいくらか

**答曰** 物の数 28

**術文** 略す

**現代解** 求める数を $x$ とするとき、「只云う」の部分から 法 $= x-1-3-5-7-9$ であり、方程式

$$x = 9\,\text{法} + 1$$

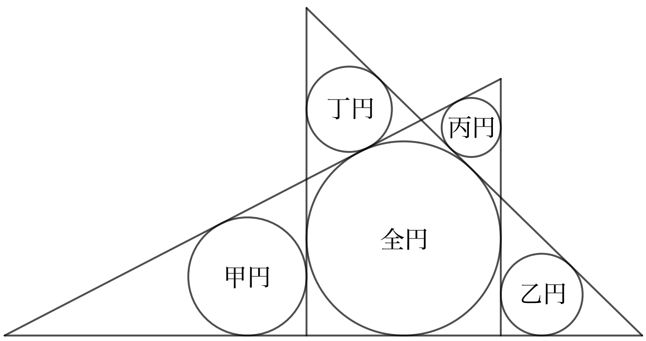
を解いて $x$ を求めればよい。なお、又云うの部分では 法 $= x-2-4-6-8$ であり、方程式

$$x = 3\,\text{法} + 4$$

を解く問題となるが、これも前者と同じ方程式である。あとは $x$ に関する 1 次方程式を解けばよい。

問題 6-7

今、図のように、2 つの直角三角形に 5 円を容れる。只云う 甲円径若干、乙円径若干、丙円径若干とし、丁円径と全円径はいくらか。




**答曰** 左術 (術文) より各径を得る。

**術文** 丁円径 $= \dfrac{\text{甲円径} \times \text{丙円径}}{\text{乙円径}}$

$\dfrac{\text{丁円径} + \text{丙円径}}{2} = \text{寄位}$ とし、全円径 $= \sqrt{\text{甲円径} \times \text{乙円径} + \text{寄位}^2} + \text{寄位}$

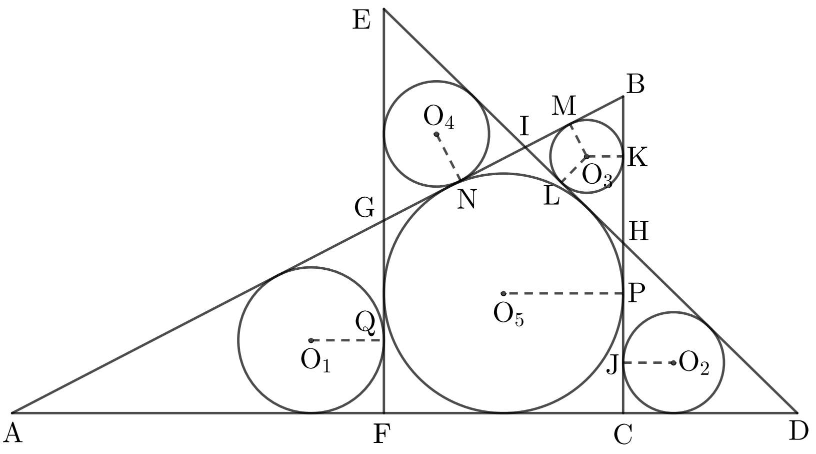
**現代解** この問題の現代解は、第 47 回愛媛和算研究会の発表資料としてまとめられている [3] ものを再掲する。

最初に丁円径を求める。甲円、乙円、丙円、丁円、全円の中心をそれぞれ $\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2, \mathrm{O}_3, \mathrm{O}_4, \mathrm{O}_5$ とし、半径をそれぞれ $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$ とする。さらに、図のように点 A から点 Q をとる。ここで、点 J は円 $\mathrm{O}_2$ と線分 CH との接点、点 K, L, M はそれぞれ円 $\mathrm{O}_3$ と線分 BH, HI, BI との接点、点 N は円 $\mathrm{O}_4$ と線分 GI との接点、点 P は円 $\mathrm{O}_5$ と線分 CH との接点、点 Q は円 $\mathrm{O}_1$ と線分 FG との接点とする。

円 $\mathrm{O}_1$ と円 $\mathrm{O}_5$ について共通外接線と共通内接線の性質 [2, 4] より $\mathrm{FG} = r_1 + r_5$, $\mathrm{CH} = r_2 + r_5$ が成り立つ。

$\triangle\mathrm{AGF} \sim \triangle\mathrm{ABC}$ であり，相似な図形の相似比とその内接円の半径の比は等しいことから、

$$r_1 : r_5 = \mathrm{FG} : \mathrm{BC} = (r_1 + r_5) : \mathrm{BC} \qquad \therefore \mathrm{BC} = \frac{r_5(r_1 + r_5)}{r_1}$$




である。同様に $\triangle$DHC $\sim$ $\triangle$DEF より

$$r_2 : r_5 = \mathrm{CH} : \mathrm{EF} = (r_2 + r_5) : \mathrm{EF} \qquad \therefore \mathrm{EF} = \frac{r_5(r_2 + r_5)}{r_2}$$

を得る。したがって

$$\mathrm{BH} = \mathrm{BC} - \mathrm{CH} = \frac{r_5(r_1 + r_5)}{r_1} - (r_2 + r_5) = \frac{r_5^2 - r_1 r_2}{r_1},$$

$$\mathrm{EG} = \mathrm{EF} - \mathrm{FG} = \frac{r_5(r_2 + r_5)}{r_2} - (r_1 + r_5) = \frac{r_5^2 - r_1 r_2}{r_2}$$

となる。さらに $\triangle$BHI $\sim$ $\triangle$GEI が成り立つので

$$\frac{r_4}{r_3} = \frac{\mathrm{EG}}{\mathrm{BH}} = \frac{\dfrac{r_5^2 - r_1 r_2}{r_2}}{\dfrac{r_5^2 - r_1 r_2}{r_1}} = \frac{r_1}{r_2}$$

より等式 $r_4 = \dfrac{r_1 r_3}{r_2}$ を得る。これは術文における

$$\text{丁円径} = \frac{\text{甲円径} \times \text{丙円径}}{\text{乙円径}}$$

である。

次に全円径を求めるため、$\triangle$BHI の面積を二通りに表す。

$\triangle \mathrm{HJO}_2 \sim \triangle \mathrm{HKO}_3$ で，相似比は $r_2 : r_3$ である。また、$\mathrm{CH} = r_2 + r_5$，$\mathrm{CJ} = r_2$ なので $\mathrm{HJ} = \mathrm{CH} - \mathrm{CJ} = r_5$ を得る。したがって $r_2 : r_3 = \mathrm{HJ} : \mathrm{HK} = r_5 : \mathrm{HK}$ より $\mathrm{HK} = \dfrac{r_3 r_5}{r_2}$ を得る。さらに、円の外部の点からその円に引いた 2 本の接線の長さが等しいことから、

$$\mathrm{HL} = \mathrm{HK} = \frac{r_3 r_5}{r_2}$$

となることがわかる。

$\triangle\mathrm{GQO}_1$ と $\triangle\mathrm{BKO}_3$ も相似で、相似比は $r_1 : r_3$ だから、$r_1 : r_3 = \mathrm{GQ} : \mathrm{BK}$ を得る。ここで $\mathrm{GQ} = \mathrm{FG} - \mathrm{FQ} = (r_1 + r_5) - r_1 = r_5$ であり、円の接線の長さは等しいので $\mathrm{BM} = \mathrm{BK}$ である。ゆえに

$$\mathrm{BK} = \mathrm{BM} = \frac{r_3 r_5}{r_1}.$$

一方 $\mathrm{CH} = r_2 + r_5$, $\mathrm{CP} = r_5$ より $\mathrm{HP} = \mathrm{CH} - \mathrm{CP} = (r_2 + r_5) - r_5 = r_2$ で、共通外接線と共通内接線の性質から $\mathrm{HI} = \mathrm{KP} = \mathrm{HK} + \mathrm{HP} = \frac{r_3 r_5}{r_2} + r_2$ だから、

$$\mathrm{IL} = \mathrm{HI} - \mathrm{HL} = r_2, \qquad \mathrm{IM} = \mathrm{IL} = r_2$$

となる。

以上により三辺

$$\mathrm{BH} = \frac{r_3 r_5}{r_1} + \frac{r_3 r_5}{r_2}, \quad \mathrm{HI} = \frac{r_3 r_5}{r_2} + r_2, \quad \mathrm{BI} = \frac{r_3 r_5}{r_1} + r_2$$

をもつ $\triangle\mathrm{BHI}$ の面積 $S$ は

$$S = \frac{1}{2} r_3 \left(\mathrm{BH} + \mathrm{HI} + \mathrm{BI}\right) = \frac{1}{2} r_3 \Big( 2\frac{r_3 r_5}{r_1} + 2\frac{r_3 r_5}{r_2} + 2r_2 \Big) = r_3 \left( \frac{r_3 r_5}{r_1} + \frac{r_3 r_5}{r_2} + r_2 \right) \tag{1}$$

となる。

次に $\triangle\mathrm{BHI}$ の 辺 BH に関する高さを $h_3$, $\triangle\mathrm{IGE}$ の 辺 EG に関する高さを $h_4$ とすると $h_3 + h_4 = 2r_5$ であり

$$\frac{h_3}{2r_5} = \frac{r_3}{r_3 + r_4} \implies h_3 = \frac{2 r_3 r_5}{r_3 + r_4}$$

である。したがって

$$S = \frac{1}{2} h_3 \, \mathrm{BH} = \frac{r_3^2 r_5^2}{r_3 + r_4} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \tag{2}$$

よって (1) 式と (2) 式は等しいこと、$r_4 = \dfrac{r_1 r_3}{r_2}$ であることを用いると、$r_5$ に関する 2 次方程式

$$r_5^2 - (r_3 + r_4)\, r_5 - r_1 r_2 = 0$$

が得られ、題意より $r_5 > 0$ に注意すると

$$r_5 = \frac{(r_3 + r_4) + \sqrt{(r_3 + r_4)^2 + 4 r_1 r_2}}{2}.$$

となる。

ここで $t = \dfrac{r_3 + r_4}{2}$ と置くと

$$r_5 = \sqrt{r_1 r_2 + t^2} + t$$

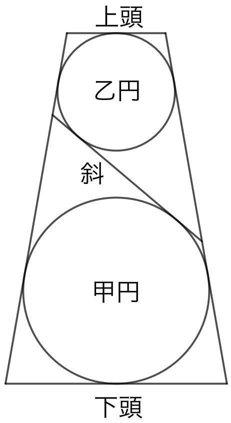
となるが、これは術文

$$\frac{\text{丁円径} + \text{丙円径}}{2} = \text{寄位}, \qquad \text{全円径} = \sqrt{\text{甲円径} \times \text{乙円径} + \text{寄位}^2} + \text{寄位}$$

と一致する。

問題 6-8

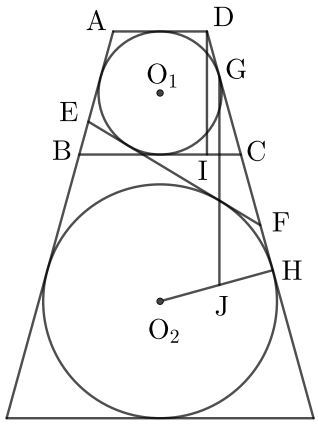
今、図のように、梯 (等脚台形) 内を斜で隔で 2 円を容れる。只云う 乙円径 15 寸、上頭 12 寸、斜線 20 寸のとき、甲円径はいくらか。




**答曰** 甲円径 24 寸
**術文** $\dfrac{\text{上頭}}{\text{乙円径}} = \text{寄位}$ とし、甲円径 $= \left(\dfrac{1}{\text{寄位}} - \text{寄位}\right) \times \text{斜} + \text{乙円径}$
**現代解** この問題の現代解は、第 46 回愛媛和算研究会において清水敏明先生により与えられている [5]。ここでは研究メモとして、独立に与えた解答を記しておく。

以下では乙円の中心と半径をそれぞれ $\mathrm{O}_1$ と $r$ で、甲円の中心と半径をそれぞれ $\mathrm{O}_2$ と $R$ で表すものとする。また、題意より $R > r$ を仮定する。

図のように点 A から J までを定める。ただし、点 G, H はそれぞれ点 $\mathrm{O}_1$, $\mathrm{O}_2$ と直線 CD の交点、点 I は直線 BC と点 D からその直線に下ろした垂線との交点、点 J は直線 $\mathrm{O}_2\mathrm{H}$ と点 G からその直線に下ろした垂線との交点とする。




図において、三角形 CDI と JGH が相似であることから等式 $\dfrac{\mathrm{DI}}{\mathrm{CI}} = \dfrac{\mathrm{GH}}{\mathrm{HJ}}$ が成り立つ。また、参考文献 [2] の補助定理 16 から等式 $\mathrm{GH} = \mathrm{EF}$ が、補助定理 17 から等式 $\mathrm{BC} = \dfrac{4r^2}{\mathrm{AD}}$ が、それぞれ

得られる。よって

$$\frac{2r}{\frac{1}{2}\left(\frac{4r^2}{\mathrm{AD}}-\mathrm{AD}\right)}=\frac{\mathrm{GH}}{\mathrm{HJ}}$$

となる。

ここで AD は問題文における「上頭」に、GH は「斜」に相当する。また、$\mathrm{HJ}=\mathrm{O_2H}-\mathrm{O_2J}=\mathrm{O_2H}-\mathrm{O_1G}=R-r$ であることから、この等式を $R$ に関する方程式と考えて解くと、

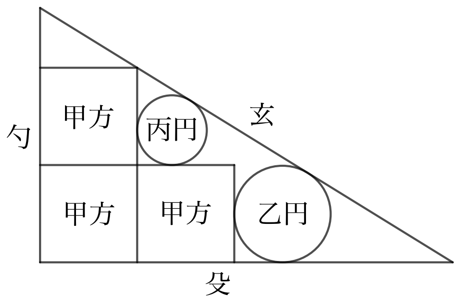
$$R=\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\mathrm{AD}}-\frac{\mathrm{AD}}{2r}\right)\times\mathrm{GH}+r$$

となる。$\dfrac{\mathrm{AD}}{2r}$ が寄位であるから、両辺を 2 倍することで術文を得る。

**補足** この問題は精要算法 巻之下 第 7 問と同一問題である。

問題 6-9

今、図のように、直角三角形内に正方形 3 箇、円 2 箇を容れる。只云う 玄 − 勾 = 2 寸、又云う 甲方面 − 乙円径 = 乙円径 − 丙円径 が成り立つとき、勾を求めよ。




**答曰** 勾 3 寸

**術文** $勾=\dfrac{3\times只云う数}{2}$

**現代解** $X=勾$, $x=甲$, $r_1=乙半径$, $r_2=丙半径$ とする。また問題の条件 (只云う) に該当する玄と勾の差を $a$ とおく。

以下、図のように点 A から点 I を定める。ここで点 G は、点 F を通る線分 AB の垂線と辺 BC の交点であり、点 I は、点 H を通る線分 AC の垂線と辺 BC の交点である[*1]。

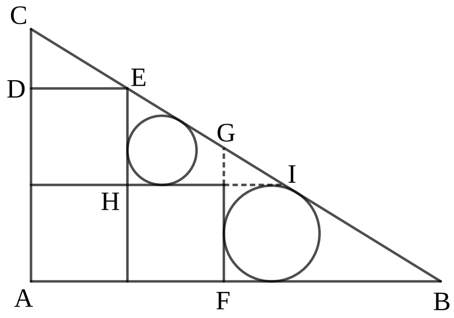
三平方の定理より、$股=\sqrt{a^2+2aX}$ である。また、三角形 ABC と DEC が相似だから、等式

$$x=\frac{X\sqrt{a^2+2aX}}{X+2\sqrt{a^2+2aX}}$$

が成り立つ。さらに乙円が三角形 FBG の内接円であることから等式

$$2r_1=\frac{\sqrt{a^2+2aX}-2x}{\sqrt{a^2+2aX}}(X+\sqrt{a^2+2aX}-(X+a))=\frac{\sqrt{a^2+2aX}-2x}{\sqrt{a^2+2aX}}(\sqrt{a^2+2aX}-a)$$

[*1] この図では直線 HI と乙円が接しているように見えるが、一般にそのような性質が成り立つとは限らない。




が、丙円が三角形 HIE の内接円であることから等式

$$2r_2 = \frac{x}{X}(X + \sqrt{a^2 + 2aX} - (X + a)) = \frac{x}{X}(\sqrt{a^2 + 2aX} - a)$$

が、それぞれ得られる ([2]、補助定理 2)。ここで $t = \sqrt{a^2 + 2aX}$ とおくと、$X = \dfrac{t^2 - a^2}{2a}$ となるから

$$2r_1 = \frac{(-t^2 + 4at + a^2)(t - a)}{t^2 + 4at - a^2}, \quad 2r_2 = \frac{2at(t - a)}{t^2 + 4at - a^2}$$

とかける。

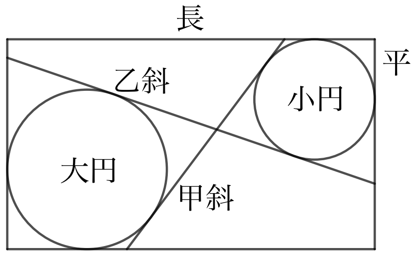
問題のもう一つの条件 (又云う) は $x = 4r_1 - 2r_2$ とかける。ここで $x = \dfrac{t(t^2 - a^2)}{t^2 + 4at - a^2}$ だから、これらを代入して整理すると等式

$$(t - 2a)(t + 3a) = 0$$

を得る。$t > 0$ となる解を求めればいいから $t = 2a$ より $\sqrt{a^2 + 2aX} = 2a$ であり、これを解くと $X = \dfrac{3}{2}a$ が導かれる。

**問題 6-10**

今、図のように、直 (長方形) 内を斜線で隔て、大円、小円を容れる。只云う 長 35 寸、平 (短い辺)20 寸、中斜 25 寸のとき、乙斜の長さはいくらか。




**答曰** 乙斜 37 寸

**術文** $\sqrt{乙斜^2 - 平^2} = 寄位$、$(平 + 甲斜) - 長 = 法$、$\dfrac{寄位 \times 平 + 長 \times 甲斜}{法} = 甲斜$、$甲斜 - 長 = 乙斜$

**現代解** 現代語訳では問題文において「長 25 寸」としているが、は正しくは「長 35 寸」である。

$a = 長$, $b = 平$, $k = 甲斜$, $r_1 = 大円半径$, $r_2 = 小円半径$, $m = \sqrt{k^2 - b^2}$ とおく。

長方形の左下の点を $(0,0)$ として座標平面上の図形と思うと、大円と小円の方程式はそれぞれ

$$(x-r_1)^2+(y-r_1)^2=r_1^2, \qquad (x-(a-r_2))^2+(y-(b-r_2))^2=r_2^2$$

とかける。甲斜を延長した直線 $l_1$ の方程式を $y=\dfrac{b}{m}x+c_1$ とおく。直線 $l_1$ と大円の中心 $(r_1,r_1)$ の距離が $r_1$ であることを用いて $c_1$ を求めると、

$$r_1=\frac{\left|\dfrac{b}{m}r_1-r_1+c_1\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{b}{m}\right)^2+1}}=\frac{-\left(\dfrac{b}{m}r_1-r_1+c_1\right)}{\dfrac{k}{m}} \quad\Longrightarrow\quad c_1=\frac{r_1}{m}(m-b-k)$$

となる。直線 $l_1$ は小円の接線でもあるから、上記と同様にして

$$r_2=\frac{\left|\dfrac{b}{m}(a-r_2)-(b-r_2)+c_1\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{b}{m}\right)^2+1}}=\frac{\dfrac{b}{m}(a-r_2)-(b-r_2)+c_1}{\dfrac{k}{m}} \quad\Longrightarrow\quad r_2=\frac{a-m}{k+b-m}b-r_1$$

を得る。

大円と小円の中心を結ぶ直線 $l_2$ の方程式は

$$y=\frac{b-r_2-r_1}{a-r_2-r_1}(x-r_1)+r_1$$

だから、$l_1$ と $l_2$ の交点の座標 $(x_0,y_0)$ は

$$(x_0,y_0)=\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{b+k-m}{a-m}r_1,\ \frac{b+k-m}{a-m}r_1\right)$$

となる。

乙斜を延長してできる直線 $l_3$ の方程式を $y=p(x-x_0)+y_0$ とおくと、直線 $l_3$ と点 $(r_1,r_1)$ の距離が $r_1$ であることより

$$\sqrt{p^2+1}r_1=|p(r_1-x_0)-r_1+y_0|=p(r_1-x_0)-r_1+y_0 \tag{1}$$

である。この式から両辺を 2 乗して $p$ に関する 2 次方程式を解くと

$$p=\frac{b}{m},\quad \frac{(a-k)(b+k+m)-bm}{a(a-b-k-m)}$$

となることから、求める $p$ は後者となる。乙斜と長方形の交点のうち、左側の座標を $(0,y_1)$ とし、右側の座標を $(a,y_2)$ とすると、

$$(y_1-y_2)=p(0-x_0)+y_0-(p(a-x_0)+y_0)=-ap$$

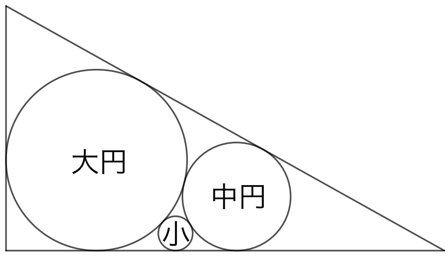
だから、これら交点間の距離は $\sqrt{(ap)^2+a^2}=a\sqrt{p^2+1}$ となり、(1) 式から

$$a\sqrt{p^2+1}=\frac{a}{r_1}(p(r_1-x_0)-r_1+y_0)=\frac{ak+bm}{b+k+m-a}+k-a.$$

**補足** この問題は精要算法 巻之下 第 16 問と同一問題である。

問題 6-11

今、図のように、直角三角形内に大、中、小円を容れる。只云う 鈎が 2352 寸、股が 3689 寸のとき、小円直径はいくらか。

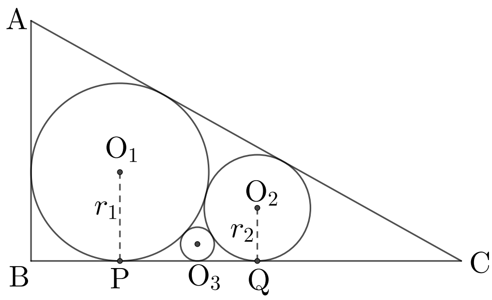



**答曰** 小円直径 306 寸

**術文** 別に玄を求める。

勾 + 殳 − 玄 = 甲, 殳 − 甲 = 乙, 2 玄 + 勾 = 丙 とし、$\dfrac{丙 - 2\sqrt{(丙 - 玄)\ 玄乙}}{甲}$ = 小円直径

**現代解** AC を斜辺とする直角三角形 ABC について、$a = \mathrm{AB}$, $b = \mathrm{BC}$, $c = \mathrm{AC}$ とおく。また、大円、中円、小円の中心をそれぞれ $\mathrm{O}_1$, $\mathrm{O}_2$, $\mathrm{O}_3$, 半径を $r_1$, $r_2$, $r_3$ とする。さらに線分 BC と円 $\mathrm{O}_1$, $\mathrm{O}_2$ の接点をそれぞれ P, Q とする。




三角形 $\mathrm{CO_2Q}$ と三角形 $\mathrm{CO_1P}$ が相似であり、参考文献 [2] の補助定理 3 より $\mathrm{PQ} = 2\sqrt{r_1 r_2}$ であるから

$$r_1 : r_2 = (b - r_1) : (b - r_1 - 2\sqrt{r_1 r_2})$$

が成り立つ。ここで $t = \sqrt{r_2}$ とおいて $t$ の 2 次方程式

$$(b - r_1)t^2 + 2\sqrt{r_1}r_1 t - r_1(b - r_1) = 0$$

を $t > 0$ に注意して解くと

$$\sqrt{r_2} = t = \frac{\sqrt{r_1^2 + (b - r_1)^2} - r_1}{b - r_1}\sqrt{r_1}$$

である。これを三円の関係式 $\dfrac{1}{\sqrt{r_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{r_2}}=\dfrac{1}{\sqrt{r_3}}$ に代入する (参考文献 [4], pp.188–189) と

$$\sqrt{r_3}=\frac{\sqrt{r_1^2+(b-r_1)^2}-r_1}{\sqrt{r_1^2+(b-r_1)^2}+b-2r_1}\sqrt{r_1}$$

となる。この式の分子分母に $\sqrt{r_1^2+(b-r_1)^2}-(b-2r_1)$ をかけて整理すると

$$\sqrt{r_3}=\frac{(b-r_1)(b-\sqrt{r_1^2+(b-r_1)^2})}{2r_1(b-r_1)}\sqrt{r_1}=\frac{b-\sqrt{r_1^2+(b-r_1)^2}}{2r_1}\sqrt{r_1}$$

$$\therefore r_3=\frac{b^2-br_1+r_1^2-b\sqrt{r_1^2+(b-r_1)^2}}{2r_1}$$

ここで円 $\mathrm{O}_1$ は直角三角形 ABC の内接円だから

$$2r_1=a+b-c$$

が成り立つ。また、$b=\sqrt{c^2-a^2}$ なので

$$b^2-br_1+r_1^2=\frac{1}{2}(2c+a)(c-a),\quad b\sqrt{r_1^2+(b-r_1)^2}=\sqrt{(c+a)c}(c-a)$$

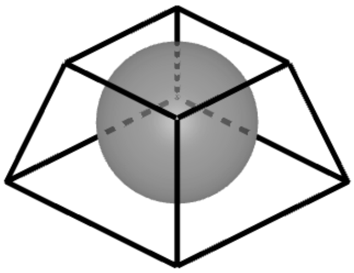
とかける。さらに $c-a=b-2r_1$ を使って書き直すと

$$2r_3=\frac{2b^2-2br_1+2r_1^2-2b\sqrt{r_1^2+(b-r_1)^2}}{2r_1}=\frac{((2c+a)-2\sqrt{(c+a)c})(b-2r_1)}{2r_1}$$

となり術文を得る。

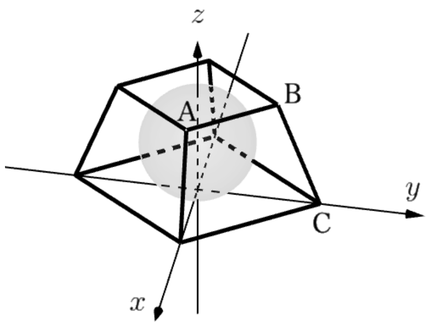
問題 6-12

今、図のように、菱臺 (菱形の台形) 内に球を容れる (球は上下四方 6 面と接している)。只云う 上面の菱形の長い対角線 4 寸、短い方が 3 寸、球の直径 6 寸のとき、下面の菱形の長い方の対角線の長さはいくらか。



**答曰** 25 寸

**術文** $\dfrac{\left(\left(\dfrac{\text{下長}}{\text{上平}}\right)^2+1\right)\times\text{球径}^2}{\text{上長}}=\text{下長}$




**現代解** 上側の菱形について手前と右側の頂点の座標をそれぞれ $A\left(\frac{a}{2}, 0, 2r\right)$, $B\left(0, \frac{b}{2}, 2r\right)$ とし、下側の菱形の右頂点の座標を $C(0, u, 0)$ とおく。

菱台右手前の平面の方程式を $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ とおくと、点 A, B, C を通ることから、

$$\alpha = 4br, \quad \beta = 4ar, \quad \gamma = a(2u - b), \quad \delta = -4aru$$

となる。よって平面の方程式は

$$4rbx + 4ary + a(2u - b)z - 4aru = 0$$

となる。球の中心 $(0, r, r)$ とこの平面の距離は $r$ だから、点と平面の距離の公式より

$$\frac{|a(2u - b)r - 4aru|}{\sqrt{(4rb)^2 + (4ar)^2 + (a(2u - b))^2}} = r$$

だから、これを $u$ について解くと

$$u = \frac{2r^2(a^2 + b^2)}{a^2 b}$$

を得る。これを変形すると

$$2u = \frac{\left(\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1\right)(2r)^2}{b}$$

という術文を得る (現代語訳の下長は上長が正しいと思われる)。

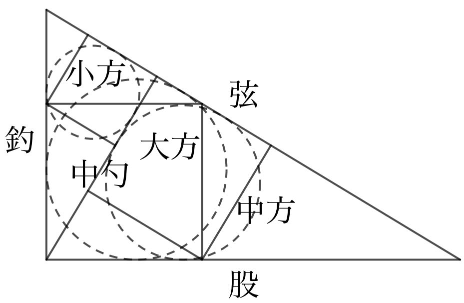
**補足** この問題は精要算法 巻之下 第 8 問と同一問題である。

問題 6-13

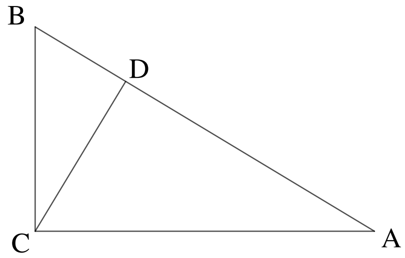
今、図のように、直角三角形内に、大円、中円、小円と大、中、小の正方形を容れる (中円、小円、中正方形は各々中鈎で隔てられている)。只云う 大円径と中鈎の差 7 寸、又云う 大正方形の一辺と大円径との差 5 寸のとき、鈎、股、弦、中鈎、大円径、中円径、小円径、大正方形、中正方形、小正方形の各辺の十和はいくらか。

**答曰** 10 和 408 寸

**術文** $\frac{\text{只云う数}}{(\text{只云数} - \text{又云数})} = \text{極}$ とし、$4((\text{極} \times \text{只云数} + \text{又云数})\ \text{極} - \text{又云数}) = \text{十和}$




**現代解** 図のように点 A から点 D を定める。ここで点 D は点 C から線分 AB に下ろした垂線の足である。




鈎、股、弦、中勾、大円半径、中円半径、小円半径、大正方形の一辺、中正方形の一辺、小正方形の一辺をそれぞれ $a, b, c, h, r_1, r_2, r_3, e_1, e_2, e_3$ と表すことにする。

与えられた条件を

$$h - 2r_1 = d_1, \quad 2r_1 - e_1 = d_2 \quad (\text{ただし } d_1 > d_2)$$

とおく (もとの問題は $d_1 = 7$, $d_2 = 5$ の場合に相当する)。

$\triangle\mathrm{ABC} \sim \triangle\mathrm{ACD}$ より $h = \dfrac{ab}{c} = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ である。さらにこの相似から

$$e_1 : (a - e_1) = b : a \Longrightarrow e_1 = \frac{ab}{a+b}$$

と書ける。ここで $s_1 = a + b$, $s_2 = ab$ とおくと、問題文の条件は

$$\frac{s_2}{\sqrt{s_1^2 - 2s_2}} - \left(s_1 - \sqrt{s_1^2 - 2s_2}\right) = d_1, \quad s_1 - \sqrt{s_1^2 - 2s_2} - \frac{s_2}{s_1} = d_2$$

となる。後者の式を $s_2$ について解くと $s_2 = \sqrt{2d_2s_1}s_1 - d_2s_1$ となる。これを前者に代入して $s_1$ について解くと $s_1 = \dfrac{2d_1^2d_2}{(d_1-d_2)^2}$ である。これから $s_2$ を $d_1, d_2$ を用いて表すと

$$s_2 = \frac{2d_1^2d_2^2(d_1+d_2)}{(d_1-d_2)^3}$$

となる。

解と係数の関係から $x^2 - s_1x + s_2 = 0$ の解は $a, b$ である。これを解くと

$$a = \frac{d_1 - \sqrt{2d_2^2 - d_1^2}}{(d_1 - d_2)^2} d_1d_2, \qquad b = \frac{d_1 + \sqrt{2d_2^2 - d_1^2}}{(d_1 - d_2)^2} d_1d_2$$

となる[*2]。よって三平方の定理より

$$c = \frac{2d_1d_2^2}{(d_1 - d_2)^2}$$

を得る。

以下、十和を計算する。直角三角形 ABC の性質より $2r_1 = a + b - c$ である。さらに三角形 ABC と三角形 ACD は相似比が $c : b$, 三角形 ABC と三角形 CBD は相似比が $c : a$ であるから

$$r_2 = \frac{b}{c}r_1, \quad r_3 = \frac{a}{c}r_1, \quad e_2 = \frac{b}{c}e_1, \quad e_3 = \frac{a}{c}e_1$$

となる。従って十和は

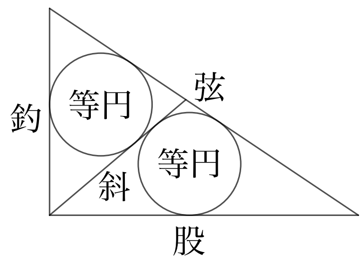
$$\begin{aligned} & a + b + c + h + 2r_1 + 2r_2 + 2r_3 + e_1 + e_2 + e_3 \\ &= a + b + c + \frac{ab}{c} + (a + b - c)\left(1 + \frac{b}{c} + \frac{a}{c}\right) + \frac{ab}{a + b}\left(1 + \frac{b}{c} + \frac{a}{c}\right) \\ &= \frac{(4d_1^2 - d_1d_2 - d_2^2)(d_1 + d_2)}{(d_1 - d_2)^2} \end{aligned}$$

となる。これは術文の式と同一のもの (ただし現代語訳には 4 倍する範囲に誤りがあると思われる) であり、$d_1 = 7$, $d_2 = 5$ を代入すると十和 408 を得る。

**補足** この問題は精要算法 巻之下 第 9 問と同一問題である。

問題 6-14

今、図のように、直角三角形内を斜辺で隔て等円 2 個を容れる。只云う 鈎 3 寸、股 4 寸のとき、等円直径はいくらか。




**答曰** 直径 1.425 寸 有奇

**術文** 勾 × 殳 = 天 とし、別に玄は求める。$\dfrac{天 - \sqrt{天^2 - (勾 + 殳 - 玄) \times 天 \times 玄}}{玄} = $ 等円直径

[*2] 和算では 鈎 < 股 としていることから符号を決めている。

**現代解** 先行研究 [1] より

$$斜 = \sqrt{\frac{鈎 \times 股}{2}}, \qquad 等円半径 = \frac{鈎 \times 股}{鈎 + 股 + 弦 + 2\,斜}$$

が成り立つ。以降、鈎を $a$, 股を $b$, 弦を $c$ で表すと、

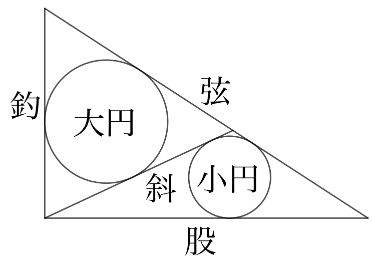
$$\begin{aligned}
r &= \frac{ab}{a+b+c+2\sqrt{\frac{ab}{2}}} = \frac{ab}{a+b+c+\sqrt{2ab}} = \frac{ab(a+b+c-\sqrt{2ab})}{(a+b+c)^2-2ab} \\
&= \frac{ab(a+b+c-\sqrt{2ab})}{2c^2+2ac+2bc} = \frac{ab(a+b+c-\sqrt{2ab})}{2c(c+a+b)} = \frac{ab}{2c} - \frac{ab\sqrt{2ab}(c-(a+b))}{2c(c^2-(a+b))^2} \\
&= \frac{ab}{2c} - \frac{ab\sqrt{2ab}(c-(a+b))}{2c\cdot(-2ab)} = \frac{ab}{2c} - \frac{\sqrt{\frac{ab}{2}}(a+b-c)}{2c} = \frac{ab}{2c} - \frac{\sqrt{\frac{ab}{2}(a+b-c)^2}}{2c} \\
&= \frac{ab}{2c} - \frac{\sqrt{ab(ab-(ac+bc-c^2))}}{2c} = \frac{ab}{2c} - \frac{\sqrt{(ab)^2-(a+b-c)abc}}{2c}
\end{aligned}$$

これは術文と同じ式である。ただし、この術文に $a = 3$, $b = 4$ を代入すると、等円の直径は $1.4202\cdots$ となり数値計算の誤りがあることがわかる。

**注意** 上記の解法は Stewart の公式を利用したものである [1]。参考文献 [2] の補助定理 8 (算法助術の公式 57) を利用すると、より簡単に術文が得られる。これについては、より一般の状況を扱っている次の問題の別解として与える。

問題 6-15

今、図のように、直角三角形内を斜線で隔て大円、小円を容れる。只云う 鈎 18 寸、股 24 寸、大円直径 9 寸のとき、小円直径はいくらか。



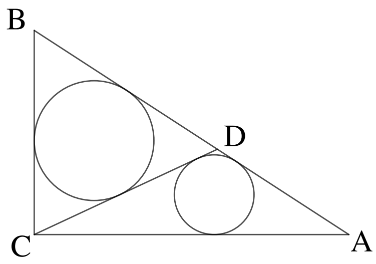

**答曰** 小円直径 8 寸

**術文** 実 = 鈎 + 股 − 玄 − 大径 とし、$\dfrac{実}{1-\dfrac{玄}{勾\times殳}} \times 大径 = 小円径$

**現代解** 図のように点 A, B, C, D を定める。また、$a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{AC}$ $c = \mathrm{AD}$, $d = \mathrm{BD}$, $t = d + c$, $x = \mathrm{CD}$ とおく。

また、大円を円 O, 小円を円 O$'$ とおき、円 O の半径を R, 円 O$'$ の半径を $r$ とおく。

辺 AB を底辺としたときの三角形 ABC の高さを $h$ とする。三角形の相似から $h = \dfrac{ab}{c+d}$ と書ける。




△ADC の面積をふた通りに書くことで等式 $\dfrac{1}{2}r(b+d+x)=\dfrac{1}{2}dh$ が得られるから

$$x=\frac{dh-rb-rd}{r} \tag{2}$$

が成り立つ。同様に △BCD の面積から $\dfrac{1}{2}R(a+c+x)=\dfrac{1}{2}(t-d)h$ が得られて

$$x=\frac{h(t-d)+R(d-a-t)}{R} \tag{3}$$

以上から

$$d=\frac{rht+Rr(b-a-t)}{Rh-2Rr+rh}=\frac{-Rabt+Rbrt-Rrt^2+abrt}{Rab-2Rrt+abr} \tag{3}$$

となる。(2) 式に (3) 式を代入して整理すると、

$$x=\frac{-R^2a^2t-2R^2at^2+R^2b^2t-R^2t^3+Ra^3b+2Ra^2bt-Rab^3+Rabt^2-a^3b^2}{2Rabt-a^2b^2}$$

となる。

以上の結果を Stewart の定理 ([2], 補助定理 20)

$$a^2d+b^2c=(d+c)(x^2+dc)$$

に代入して $r$ について解くと[*3]

$$r=\frac{ab}{t+b-a},\quad \frac{Ra^2b+Rab^2+Rabt-a^2b^2}{2Rat+2Rbt+2Rt^2-a^2b-ab^2-abt}$$

となる。ここで $r=\dfrac{ab}{t+b-a}$ を (2) 式に代入すると、$x=-d$ だから不適。よって、求める解は後者である。ここで恒等式

$$2(ab-aR-bR-Rt)=(a+b+t)(a+b-t-2R)$$

を用いると

$$r=\frac{ab(a+b+t)(a+b-t-2R)}{2(a+b+t)(ab-2Rt)}=\frac{ab(a+b-t-2R)}{2(ab-2Rt)}=\frac{a+b-t-2R}{2\left(1-\dfrac{2Rt}{ab}\right)}$$

*3 かなり複雑な式変形のため、数学教育ソフト GeoGebra[7] の CAS (Computer Algebra System) を用いて解いている。

だから術文を得る。

**別解** 上記の現代解と同じ記号を用いることとする。直角三角形 ABC の内接円の半径を $\rho$ とすると、参考文献 [2] の補助定理 8 (算法助術の公式 57) より等式

$$h(R+r-\rho)-2Rr=0$$

が成り立つ。ここで直角三角形の内接円の性質より $\rho=\dfrac{a+b-t}{2}$ で、先の現代解と同様に $h=\dfrac{ab}{t}$ であることがわかるから

$$\frac{ab}{t}\left(R+r-\frac{a+b-t}{2}\right)-2Rr=0$$

を得るので、この式を $r$ について解けばよい。

なお、問題 6-14 の別解を考える際には $R=r$ として 2 次方程式を解くと、術文と同じ式が得られる。

**補足** この問題は精要算法 巻之下 第 10 問と同一問題である。

## 参考文献

[1] 石井蓮也・石川乃々・犬伏悠真・奥井友梨、愛媛大学教育学部 2021 年度卒業研究論文、2022 年
[2] 愛媛和算研究会、愛媛の算額研究 〜現代解法を通して〜、2017 年
[3] 沖本貫成・宮崎智也・宮本海羽・吉岡倖佑、「雑題」「和算の奥義百選」の現代解と数学ソフトウェアによる作図、第 47 回愛媛和算研究会発表資料、2022 年
[4] 小寺裕、江戸の天才達が開花させた和算の魅力に迫る!、C&R 研究所、2016 年
[5] 清水敏明、『雑題』三十巻 6-8 の現代解、第 46 回愛媛和算研究会発表資料、2021 年
[6] 田部井勝信、精要算法 巻之下 (幾何問題)、一粒書房、2020 年
[7] Hohenwarter, M. et al, GeoGebra, `http://www.geogebra.org`